Hans Walser, [20160410]

Simplex

1 Worum geht es?

Ein Simplex oder n-Simplex ist das n-dimensionale Analogon zu Strecke, Dreieck, Tetraeder, ...

Wir setzen die Kantenlänge 1 voraus (regelmäßiges Simplex) und berechnen die Höhe h_n und das n-d-Volumen H_n sowie weiteres.

Die Abbildung 1 zeigt ein regelmäßiges Tetraeder.

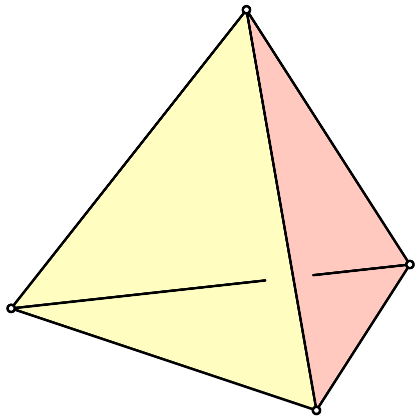

Abb. 1: Regelmäßiges Tetraeder

2 Höhe

Aus der Schule bekannt:

$$\begin{aligned} &h_1 = 1 && \text{Strecke} \\ &h_2 = \sqrt{\tfrac{3}{4}} \approx 0.8660 && \text{regelmäßiges Dreieck} \\ &h_3 = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \approx 0.8165 && \text{regelmäßiges Tetraeder} \end{aligned} \quad (1)$$

Es gilt die Rekursion:

$$h_n = \sqrt{1^2 - \left(\tfrac{1}{n}\right)^2}\, h_{n-1} = \sqrt{\tfrac{n^2-1}{n^2}}\, h_{n-1} \quad (2)$$

Explizite Formel:

$$h_n = \sqrt{\tfrac{n+1}{2n}} \tag{3}$$

Beweis induktiv: Wegen (1) ok für $n = 1$. Induktionsschritt:

$$h_n = \sqrt{\tfrac{n^2-1}{n^2}}\, h_{n-1} = \sqrt{\tfrac{n^2-1}{n^2}} \sqrt{\tfrac{(n-1)+1}{2(n-1)}} = \sqrt{\tfrac{(n+1)(n-1)n}{n^2\, 2(n-1)}} = \sqrt{\tfrac{n+1}{2n}} \tag{4}$$

Grenzwert: Es ist:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \approx 0.7071 \tag{5}$$

Die Höhen haben eine untere Schranke.

3 Volumen

Aus der Schule bekannt:

$$\begin{array}{ll} H_1 = 1 & \text{Strecke} \\ H_2 = \sqrt{\tfrac{3}{16}} \approx 0.4330 & \text{regelmäßiges Dreieck} \\ H_3 = \sqrt{\tfrac{1}{72}} \approx 0.1179 & \text{regelmäßiges Tetraeder} \end{array} \tag{6}$$

Rekursion (Verwendung von (3)):

$$H_n = \tfrac{1}{n} h_n H_{n-1} = \tfrac{1}{n}\sqrt{\tfrac{n+1}{2n}}\, H_{n-1} \tag{7}$$

Explizite Formel:

$$H_n = \tfrac{1}{n!}\sqrt{\tfrac{1}{2}}^{\,n} \sqrt{n+1} \tag{8}$$

Beweis induktiv: Wegen (6) ok für $n = 1$. Induktionsschritt:

$$H_n = \tfrac{1}{n}\sqrt{\tfrac{n+1}{2n}}\, H_{n-1} = \tfrac{1}{n}\sqrt{\tfrac{n+1}{2n}}\, \tfrac{1}{(n-1)!}\sqrt{\tfrac{1}{2}}^{\,n-1} \sqrt{n} = \tfrac{1}{n!}\sqrt{\tfrac{1}{2}}^{\,n} \sqrt{n+1} \tag{9}$$

Grenzwert: Es ist:

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n!}\sqrt{\tfrac{1}{2}}^{\,n}\sqrt{n+1} = 0 \tag{10}$$

Das Volumen verschwindet sehr rasch (Tab. 1).

n	H_n
1	1
2	0.4330127020
3	0.1178511302
4	0.02329237477
5	0.003608439184
6	0.0004593318248
7	0.00004960317460
8	0.000004650297621

Tab. 1: Das Volumen verschwindet

4 Bauteile

Wir erstellen eine Tabelle (Tab. 2) über die Anzahl der Eckpunkte, der Kanten, der Dreiecke, der Tetraeder, allgemein der niedrigerdimensionalen „Seitenelemente“ des n-Simplexes.

In der Kopfzeile die Dimension $k \leq n$ der Bauteile, in der linken Spalte die Dimension n des Simplex. Den Punkt bezeichnen wir als 0-Simplex. Den n-Simplex zählen wir bei seiner eigenen Dimension einmal mit.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	2	1				
2	3	3	1			
3	4	6	4	1		
4	5	10	10	5	1	
5	6	15	20	15	6	1

Tab. 2: Bauteile

Wir erkennen das Pascal-Dreieck der Binomialkoeffizienten, wobei die Spalte ganz links fehlt.

Zum Verständnis stellen wir uns den Übergang von einer Dimension in die nächste vor: Es kommt ein zusätzlicher Eckpunkt ins Spiel, der mit allen bisherigen Bauteilen verbunden wird. Zu den schon vorhandenen Dreiecken zum Beispiel kommen zusätzlich alle Dreiecke, die mit dem neuen Eckpunkt und den bisherigen Kanten gebildet werden können. Mit dieser Überlegung ergibt sich die übliche Rekursion für das Pascal-Dreieck.

Man beachte den Versatz bei der Indizierung: Das n-Simplex hat $n+1$ Eckpunkte.

5 Gesamte Kantenlänge

Das n-Simplex hat $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$ Kanten der Länge eins. Die Anzahl ist also auch die gesamte Kantenlänge. Die Kantenlänge divergiert für $n \to \infty$.

6 Gesamte Hyperoberfläche

Das n–Simplex hat $n + 1$ Simplexe der Dimension $n - 1$ als Hyperoberflächenelemente. Für die gesamte Hyperoberfläche erhalten wir daher:

$$\text{Hyperoberfläche} = (n+1)H_{n-1} = (n+1)\tfrac{1}{(n-1)!}\sqrt{\tfrac{1}{2}}^{\,n-1}\sqrt{n} \tag{11}$$

Wir erhalten für $n \to \infty$ den Grenzwert null (Tab. 3).

n	Hyperoberfläche
1	2
2	3
3	1.732050808
4	0.5892556510
5	0.1397542486
6	0.02525907427
7	0.003674654599
8	0.0004464285713
9	0.00004650297621
10	0.000004236377687

Tab. 3: Hyperoberfläche

Obwohl die Kantenlänge divergiert, gehen Volumen und Hyperoberfläche gegen null. Eine recht spießige Sache.

7 Gesamte 2-d-Fläche

Das n-Simplex hat $\binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3!}$ gleichseitige Dreiecke mit dem Flächeninhalt $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Die gesamte 2-d-Fläche divergiert also.

Analog kann gezeigt werden, dass bei festem k das gesamte k-dim-Hypervolumen divergiert.
Wenn wir also in der Tabelle 2 senkrecht nach unten gehen, divergiert es.

8 Gesamte *n*–2-dim Hyperfläche

Das n-Simplex hat $\binom{n+1}{n-2} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$ Bauelemente der Dimension $n - 2$.
Für die Summe deren Hypervolumina erhalten wir:

$$\frac{(n+1)n}{2} H_{n-2} = \frac{(n+1)n}{2} \frac{1}{(n-2)!} \sqrt{\frac{1}{2}}^{\,n-2} \sqrt{n-1} \tag{12}$$

Auch dies geht gegen null (Tab. 4, Lesebeispiele: Das Dreieck ($n = 2$) hat drei Ecken. Das Tetraeder ($n = 3$) hat die gesamte Kantenlänge 6. Die gleichseitigen Dreiecke im 4-Simplex haben die Gesamtfläche 4.330127020):

n	n–2-Unterhypervolumina
2	3
3	6
4	4.330127020
5	1.767766953
6	0.4891398700
7	0.1010362971
8	0.01653594569
9	0.002232142857
10	0.0002557663690

Tab. 4: Unterdach

Allgemein ist es so, dass wir bei Schrägen parallel zur rechten Kante des Pascal-Dreiecks den Grenzwert null erhalten. Schuld sind die Fakultäten im Nenner. Dagegen ist kein Kraut gewachsen.