Hans Walser, [20171002]

Spezielle Ellipsen

1 Worum geht es?

Konjugierte Ellipsen, bei denen die Brennpunkte der einen Ellipse jeweils auf der anderen Ellipse liegen, vgl. [1].

2 Zwei Ellipsen

Gesucht ist das Achsenverhältnis der Ellipsen der Abbildung 1. Die Brennpunkte jeder Ellipse liegen jeweils auf der anderen Ellipse.

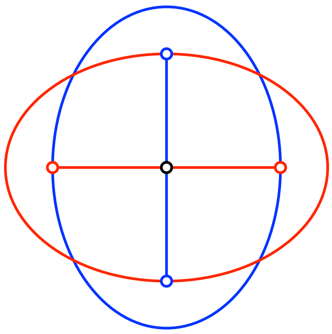

Abb. 1: Spezielle Ellipsen

Das Achsenverhältnis ist $a:b=\sqrt{2}:1$.

3 Drei Ellipsen

Gesucht sind drei kongruente Ellipsen, deren Brennpunkte jeweils auf den beiden anderen Ellipsen liegen. Gesucht sind die Achsen a und b der Ellipsen.

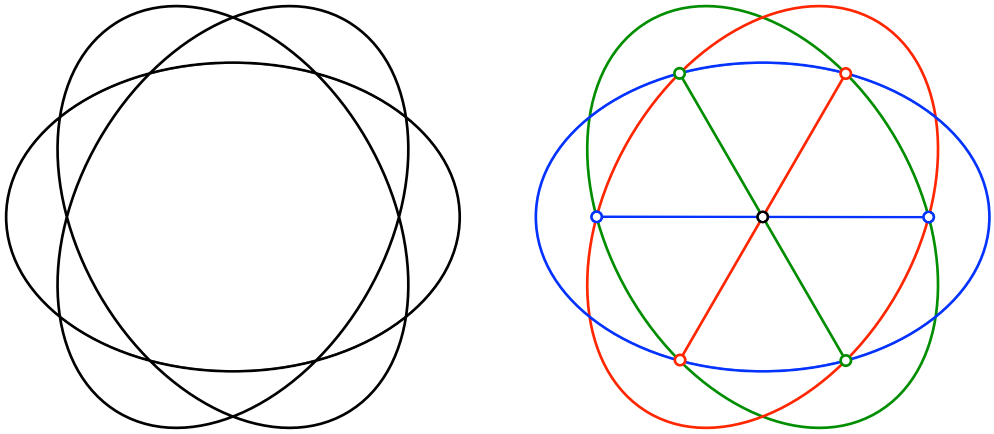

Abb. 2: Drei Ellipsen

Das Zentrum und die sechs Brennpunkte bilden ein reguläres Dreiecksraster, dessen Seitenlänge wir 1 setzen.
Damit ist:

$$a^2 - b^2 = 1 \tag{1}$$

Der Punkt mit den Koordinaten $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ liegt auf der Ellipse mit der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

Es ist also:

$$\frac{\frac{1}{4}}{a^2} + \frac{\frac{3}{4}}{b^2} = 1 \tag{3}$$

Aus (1) und (3) ergibt sich eine biquadratische Gleichung für a. Die positiven reellen Lösungen sind:

$$a=\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\approx 1.366 \text{ und } b=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\approx 0.931 \tag{4}$$

Für das Achsenverhältnis ergibt sich:

$$\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{3}+1}\approx 1.468 \tag{5}$$

4 Vier Ellipsen

Gesucht sind vier kongruente Ellipsen, deren Brennpunkte jeweils auf den beiden benachbarten Ellipsen liegen (Abb. 3).

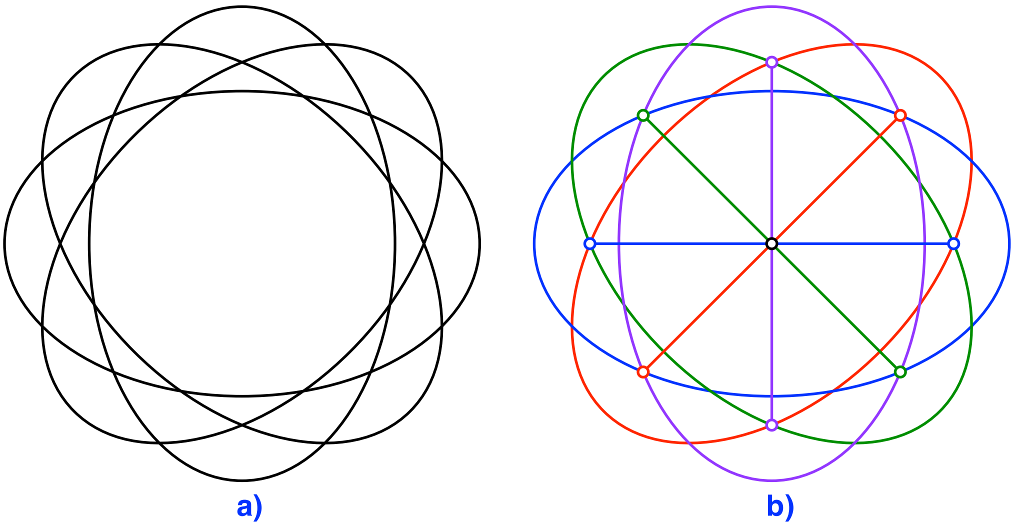

Abb. 3: Vier Ellipsen

Man beachte, dass zum Beispiel die Brennpunkte der roten Ellipse (Abb. 3b) nicht auf der grünen Ellipse liegen. Rot und grün sind also nicht konjugiert.

Für die Berechnung von a und b setzen wir die halbe Brennpunktweite $c = 1$. Damit gilt wieder die Gleichung (1). Die Ellipse mit der Gleichung (2) verläuft durch den Punkt mit den Koordinaten $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Somit erhalten wir die Bedingung:

$$\frac{\frac{1}{2}}{a^2}+\frac{\frac{1}{2}}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=2 \tag{6}$$

Die Gleichungen (1) und (6) ergeben eine biquadratische Gleichung für a mit den positiven reellen Lösungen:

$$a = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.307, \quad b = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 0.841 \tag{7}$$

5 Allgemein

Gesucht sind $n \geq 2$ kongruente Ellipsen, deren Brennpunkte jeweils auf den beiden benachbarten Ellipsen liegen. Die Abbildung 4 zeigt die Situation für $n = 12$.

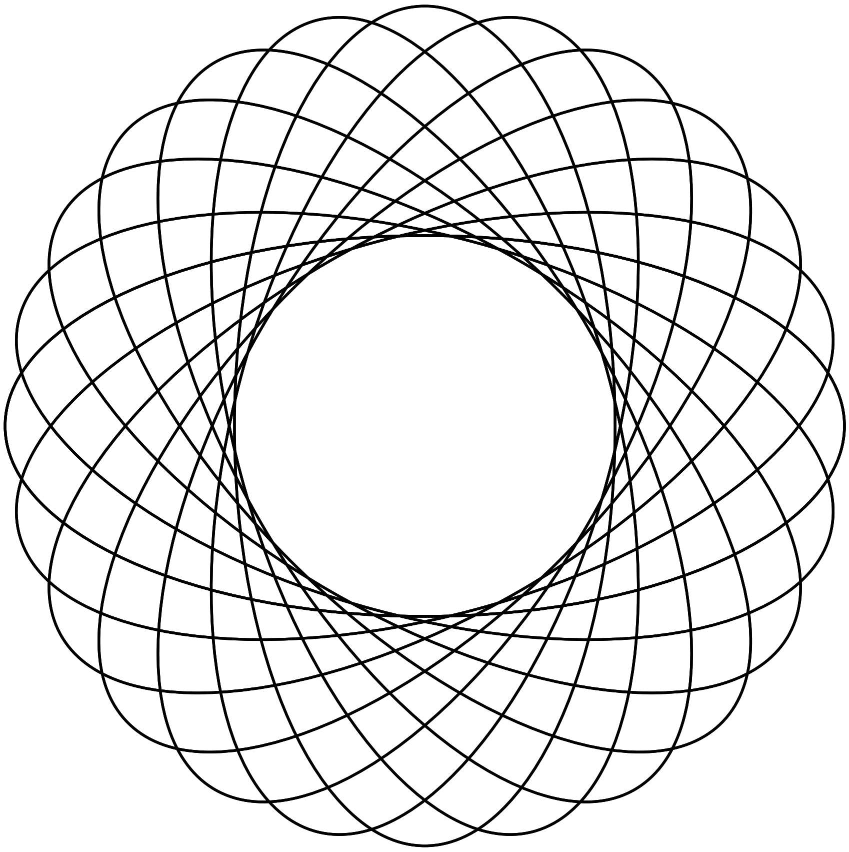

Abb. 4: Zwölf Ellipsen

Für die Berechnung von a und b setzen wir die halbe Brennpunktweite $c = 1$. Damit gilt wieder die Gleichung (1). Die Ellipse mit der Gleichung (2) verläuft durch den Punkt mit den Koordinaten $\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$. Somit erhalten wir die Bedingung:

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{a^2}+\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{b^2}=1 \tag{8}$$

Die Tabelle 1 gibt die positiven reellen Lösungen in Abhängigkeit von n.

n	a	b
2	1.414213562	1
3	1.366025404	0.9306048592
4	1.306562965	0.8408964155
5	1.260073511	0.7666715415
6	1.224744872	0.7071067810
7	1.197448846	0.6586985192
8	1.175875602	0.6186141224
9	1.158455931	0.5848248826
10	1.144122805	0.5558929702
11	1.132136280	0.5307848499
12	1.121971054	0.5087426116

Tab. 1: Numerische Werte

Websites

[1] Konjugierte Kegelschnitte (abgerufen 01.10.2017):
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Konjugierte_Kegelschnitte/Konjugierte_Kegelschnitte.htm