Hans Walser, [20131216a], [20140308]

Sphärische Spiralen

1 Idee

Die Idee ist einfach: Wir zeichnen auf einer Weltkarte eine schräg ansteigende Gerade und studieren deren Bild auf der Kugel.

Je nach Kartentyp gibt das verschiedene Kurven auf der Kugel.

2 Plattkarte

In der Plattkarte ist das Gradnetz ein Quadratnetz. Die Karte der Abbildung 1 hat eine Maschenweite von 15°.

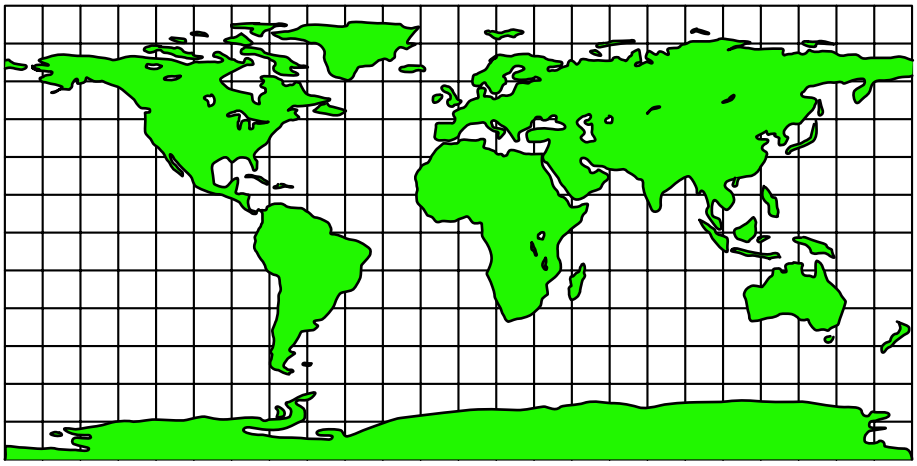

Abb. 1: Plattkarte

2.1 Steigung 1

Die Geraden mit Steigung ±1 folgen den Diagonalen der Netzquadrate (Abb. 2).

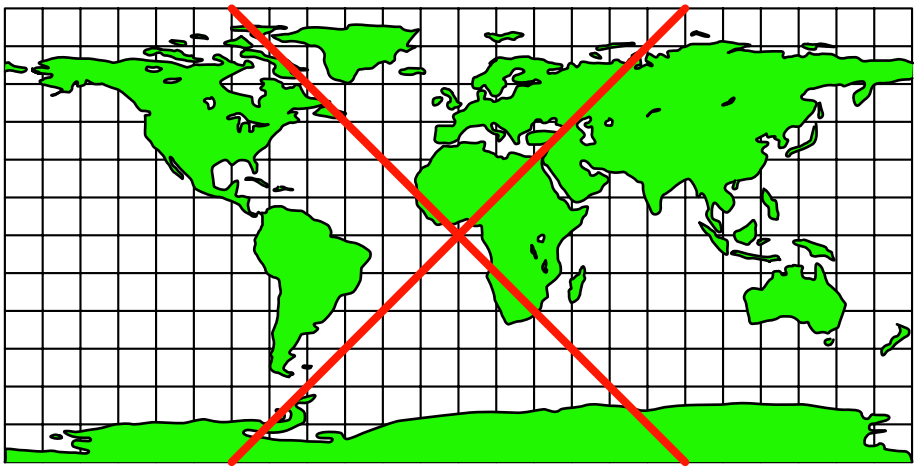

Abb. 2: Situation auf der Karte

Die Abbildung 3 zeigt die Situation auf der Kugel. Die Kurve wird als *vivianische Kurve* oder *Strophoide* bezeichnet.

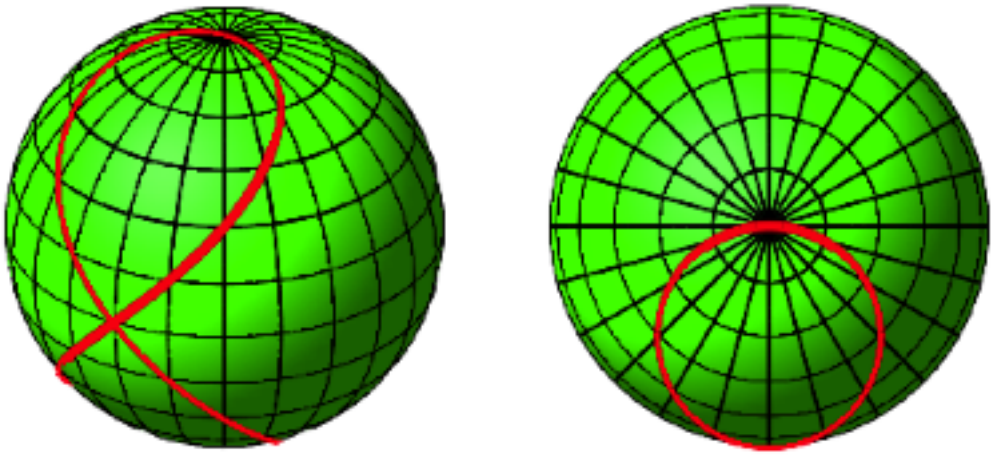

Abb. 3: Situation auf der Kugel

Wenn wir die Sache von oben ansehen, erscheint ein Kreis. Tatsächlich ist die Kurve die Schnittkurve der Kugel mit einem stehenden Kreis-Zylinder (Abb. 4).

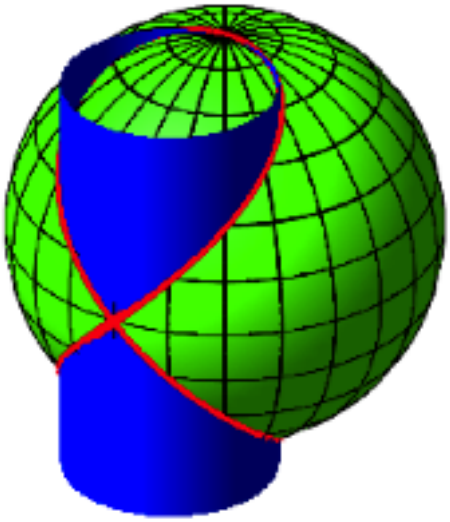

Abb. 4: Schnitt mit Kreis-Zylinder

2.2 Steigung 2

Die Steigung ±2 berechnen wir aus der Sicht der Süd-Nord-Achse. Die primäre Variable ist also die geografische Breite. Auf ein Karo in Süd-Nord-Reichung geht es ±2 Karos in West-Ost-Richtung.

Die Steigung ±2 entspricht der „gewöhnlichen“ Steigung $\pm\frac{1}{2}$ (Abb. 5).

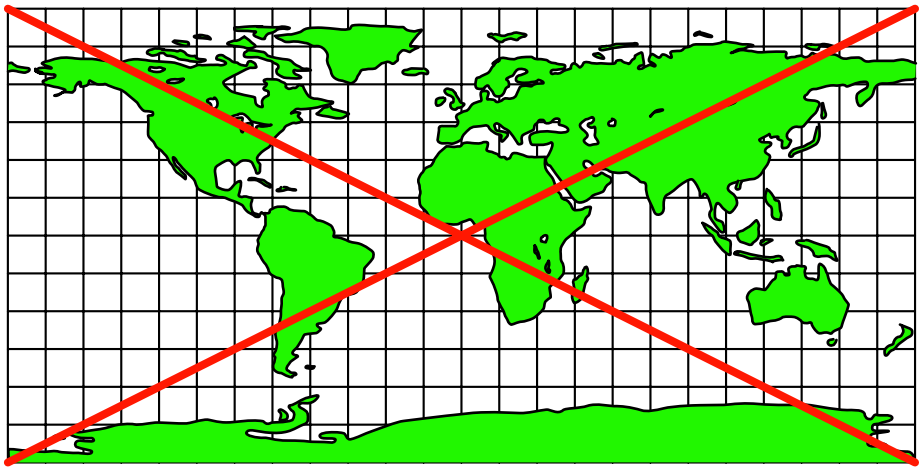

Abb. 5: Steigung ±2

Auf der Kugel ergibt sich eine herzförmige Kurve (Abb. 6).

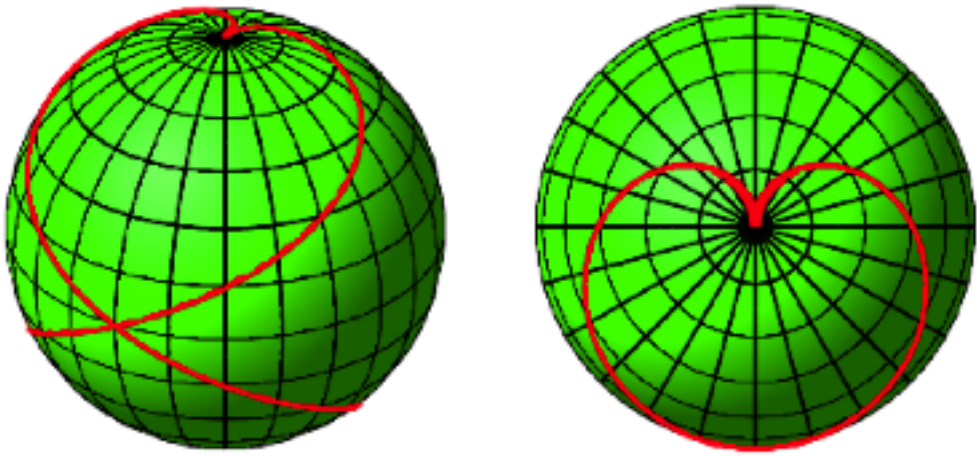

Abb. 6: Steigung ±2

Die Sicht von oben ist aber nicht die Kardioide. In der Abbildung 7 ist unserer Kurve (rot) die Kardioide (blau) gegenübergestellt.

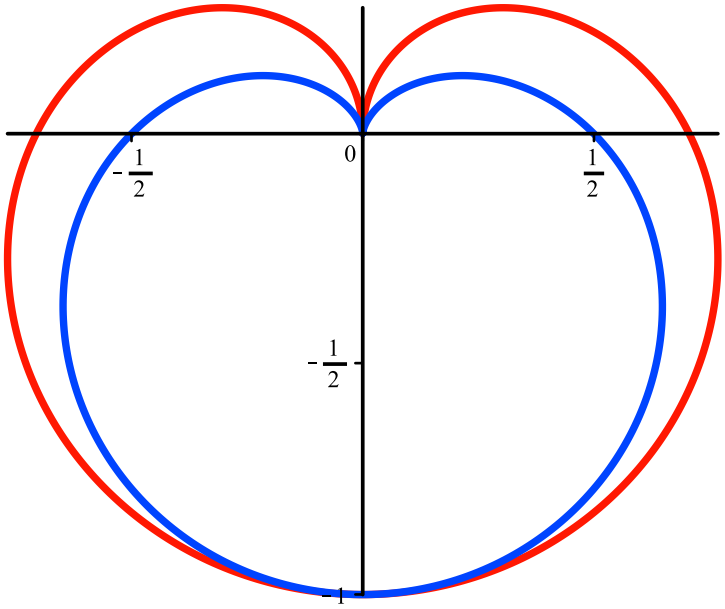

Abb. 7: Vergleich mit Kardioide

Natürlich können wir auch hier mit einem Zylinder arbeiten. Er hat die rote Kurve als Leitlinie (Abb. 8).

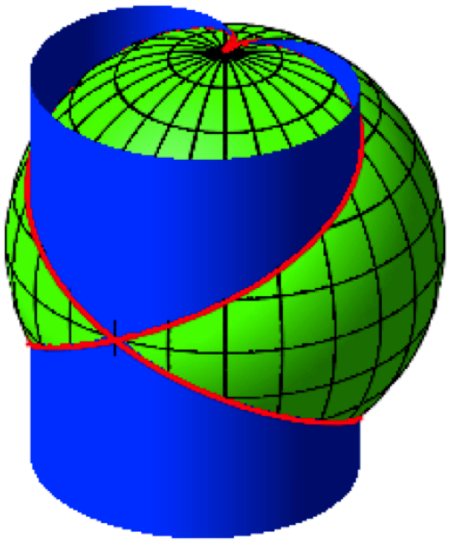

Abb. 8: Zylinder

2.3 Steigung 4

Bei der Steigung 4 muss die Kurve zweimal in West-Ost-Richtung die Erde umkreisen, um den Weg vom Südpol zum Nordpol zu schaffen (Abb. 9).

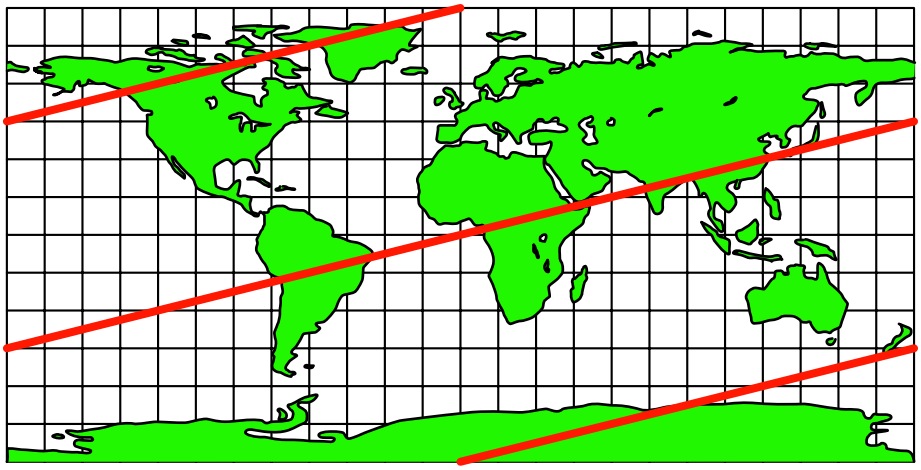

Abb. 9: Steigung 4

Wenn wir die Plattkarte zum Zylinder aufwickeln, erhalten wir eine Schraubenlinie.

Auf der Erdkugel ist die doppelte Erdumkreisung ebenfalls zu erahnen (Abb. 10). Es entwickelt sich eine Doppelspirale mit Zentren in den beiden Polen.

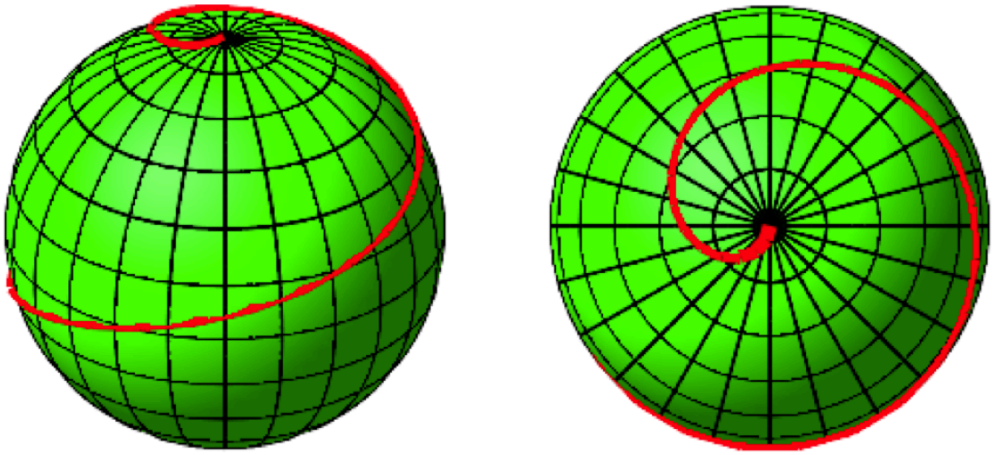

Abb. 10: Steigung 4

2.4 Steigung 24

Die Abbildung 11 zeigt in der Plalttkarte die Situation für die Steigung 24.

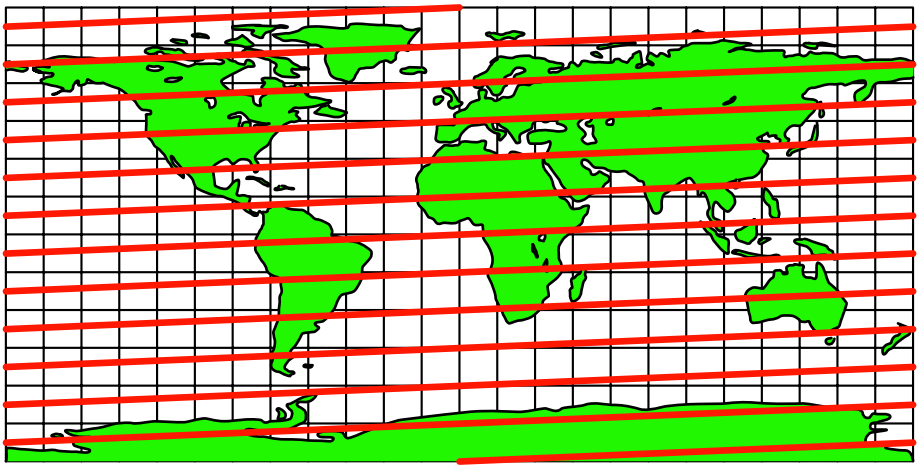

Abb. 11: Steigung 24

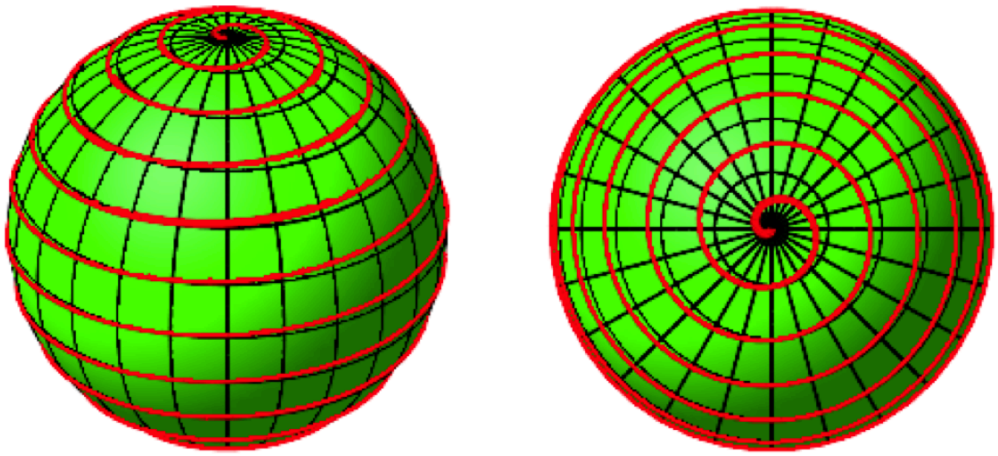

Abb. 12: Spirale auf der Kugel

Bei diesen Spiralen wächst die Poldistanz pro Umgang immer um denselben Betrag; bei der Steigung 24 sind es 15°. Diese Spiralen sind also ein sphärisches Analogon zu den archimedischen Spiralen.

Für die Steigung a haben diese Spiralen die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}\cos(t)\cos(at)\\ \cos(t)\sin(at)\\ \sin(t)\end{bmatrix},\quad t\in\left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]$$

Daraus ergibt sich $\left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=\sqrt{1+a^2\cos^2(t)}$ und für die Bogenlänge s von Pol zu Pol:

$$s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+a^2\cos^2(t)}\ \mathrm{d}t$$

Dieses Integral kann von Maple nur numerisch gelöst werden. Für $a=24$ ergibt sich zum Beispiel:

$$s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+576\cos^2(t)}\ \mathrm{d}t \approx 48.21098004$$

3 Mercator-Karte

Die Mercator-Karte ist winkeltreu. Die Abbildung 13 zeigt die Mercator-Karte für eine Maschenweite 15°. Das Gradnetz erscheint auf der Karte nicht mehr als Quadratnetz. Die Karte reicht auch nicht bis zu den Polen, denn diese sind auf der Mercator-Karte im Unendlichen.

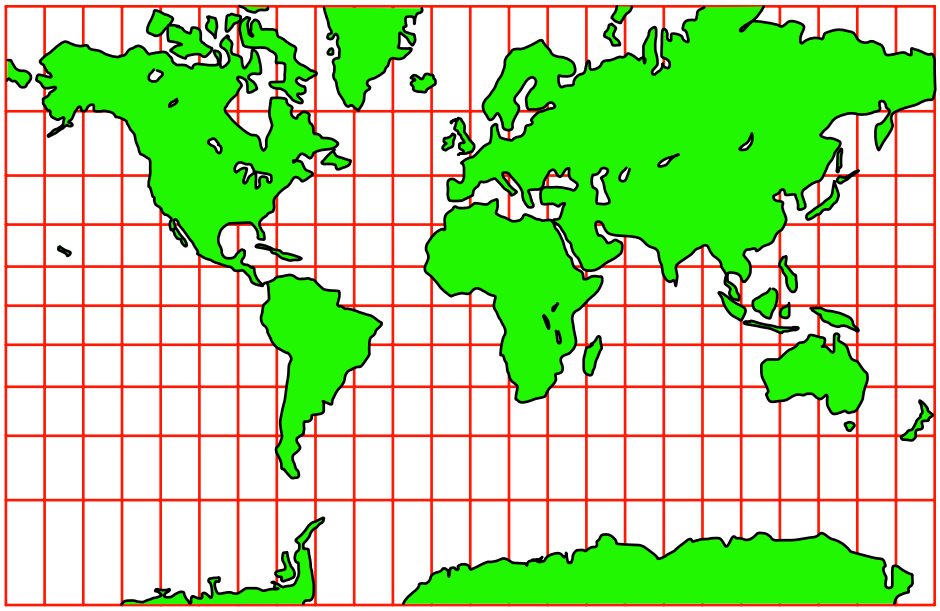

Abb. 13: Mercator-Karte

Wir können aber der Karte ein Quadratnetz unterlegen (Abb. 14).

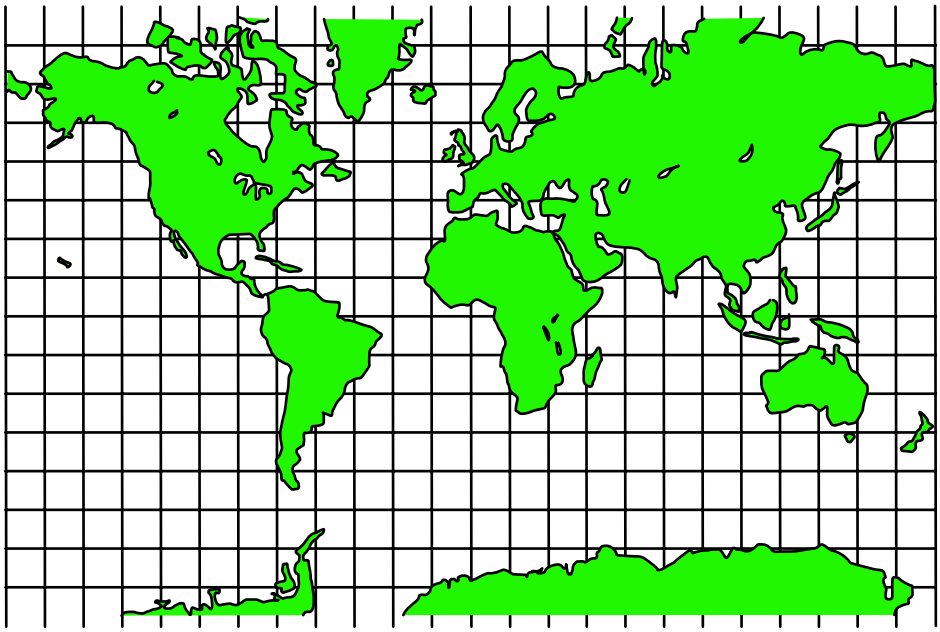

Abb. 14: Quadratnetz in der Mercator-Karte

Die senkrechten Linien des Quadratnetzes stimmen mit den Meridianen der Karte überein. Bei den horizontalen Linien stimmt es aber nur am Äquator. Das Quadratnetz ist willkürlich oben und unten bei $\pm\pi$ abgeschnitten worden. Dies ist nicht bei den Polen.

Nun bilden wir dieses Quadratnetz auf die Kugel ab (Abb. 15).

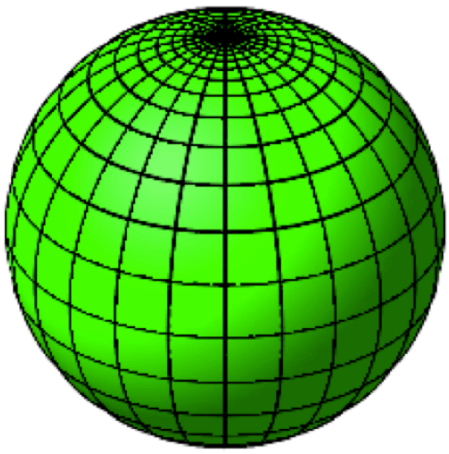

Abb. 15: Quadratnetz auf Kugel

Die Maschenweite nimmt in Richtung der Pole ab. Es gibt sogar unendlich viele Quadrate bis zu den Polen.

Nun zeichnen wir wieder Geraden in die Karte und bilden diese auf die Kugel ab.

3.1 Steigung 1

Die Gerade hat die Richtung der Quadratdiagonalen.

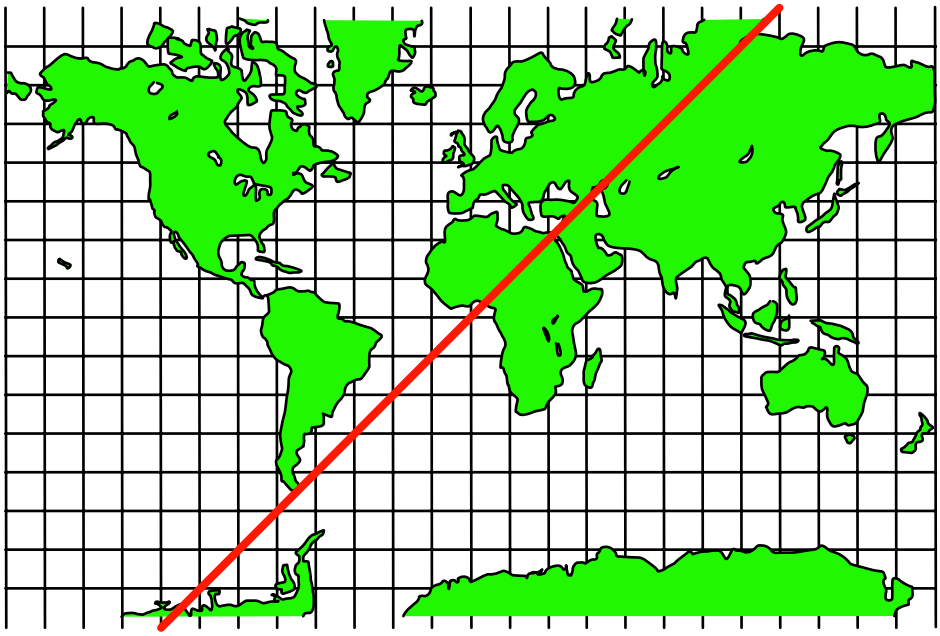

Abb. 16: Steigung 1 auf Mercator-Karte

Auf der Kugel entsteht eine so genannte *Loxodrome* (Abb. 17).

Loxodromen haben gegenüber der Nordrichtung immer denselben Kurswinkel, in unserem Beispiel ist das 45°E. Wir sehen, wie die Kurve den Quadratdiagonalen entlang läuft.

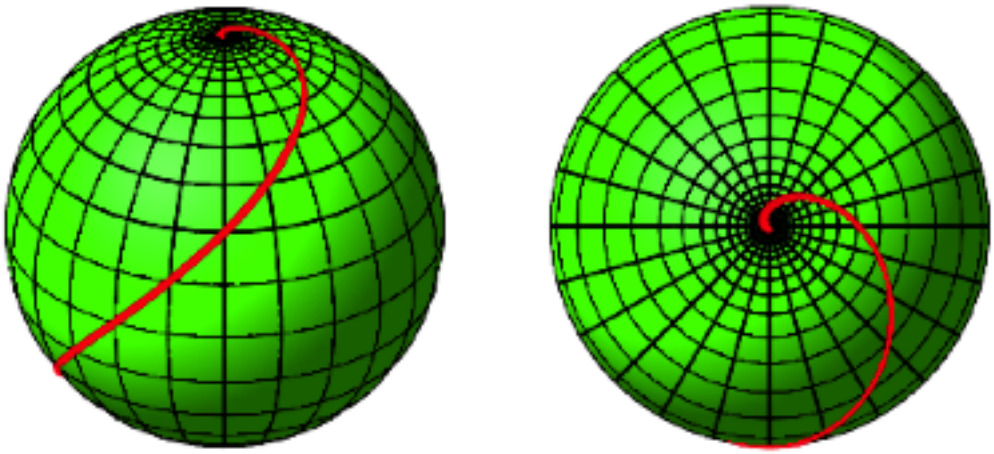

Abb. 17: Loxodrome

3.2 Steigung 2

Bei der Steigung 2 sehen wir, dass es mehrere Umgänge braucht. Da die Mercator-Karte an sich oben und unten ins Unendliche geht, braucht es sogar unendlich viele Umgänge, um von Pol zu Pol zu gelangen.

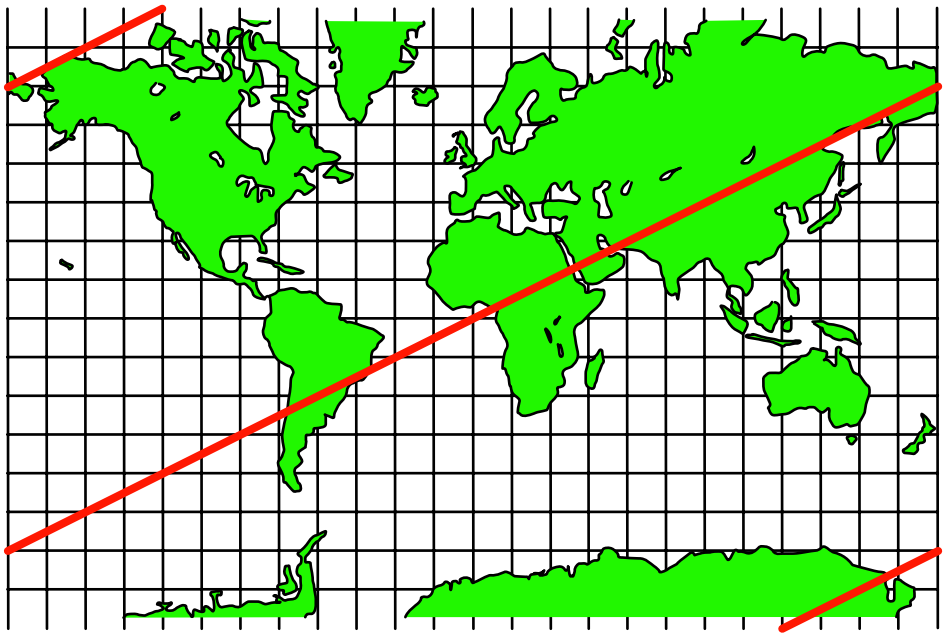

Abb. 18: Steigung 2 auf der Mercator Karte

Auf der Kugel erhalten wir die Loxodrome zum Kurswinkel $\alpha = \arctan(2) \approx 63.43°$ (Abb. 19).

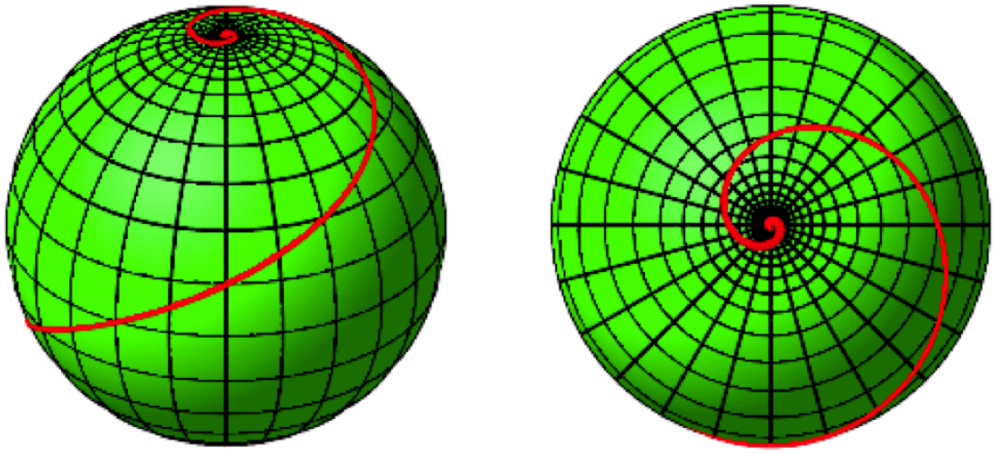

Abb. 19: Loxodrome mit Steigung 2

Solche Loxodromen hat M.C. Escher als Grundlage für verschiedene Grafiken verwendet.

3.3 Steigung 12

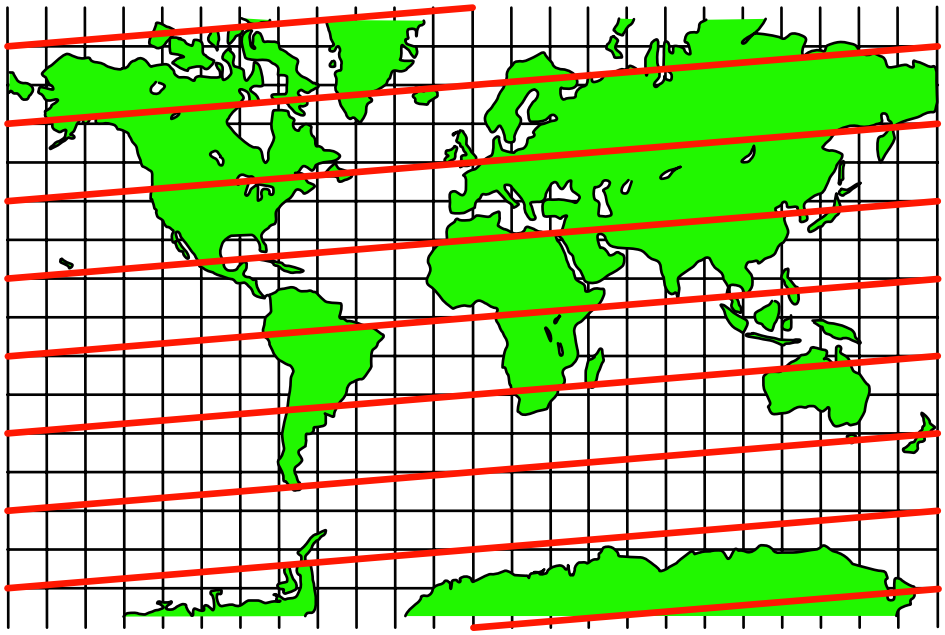

Abb. 20: Steigung 12

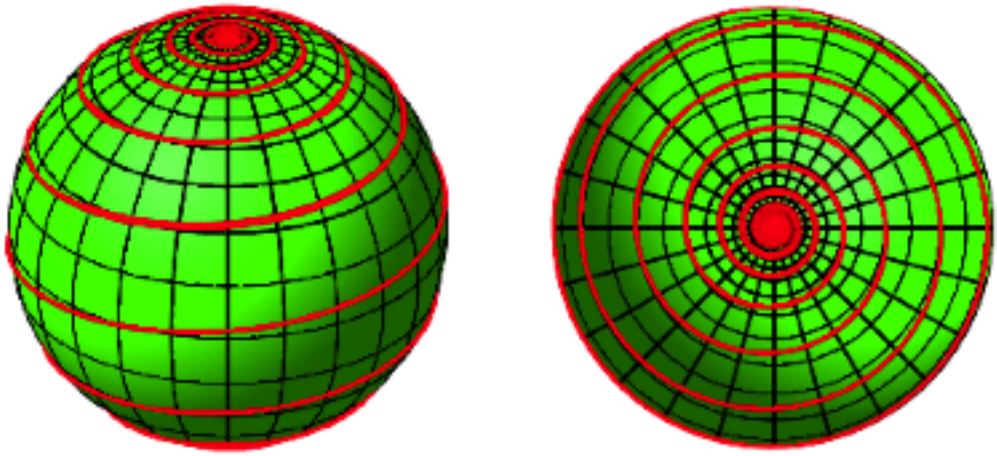

Abb. 21: Steigung 12

Die Loxodrome zur Steigung a hat die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}\frac{\cos(at)}{\cosh(t)}\\ \frac{\sin(at)}{\cosh(t)}\\ \tanh(t)\end{bmatrix},\quad t\in(-\infty,\infty)$$

Daraus ergibt sich $\left|\dot{\vec{x}}(t)\right|=\frac{\sqrt{1+a^2}}{\cosh(t)}$ und für die Bogenlänge s von Pol zu Pol:

$$s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1+a^2}}{\cosh(t)}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{1+a^2}\,\arctan\left(\mathrm{e}^t\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi\sqrt{1+a^2}$$

Die Loxodromen sind das sphärische Analogon zu den logarithmischen Spiralen. Die logarithmischen Spiralen haben nämlich ebenfalls einen konstanten Kurswinkel zum Zentrum.

4 Karte von Archimedes/Lambert

Die Karte nach Archimedes/Lambert ist flächentreutreu. Die Abbildung 22 zeigt diese Karte für eine Maschenweite 15°. Das Gradnetz erscheint auf der Karte nicht mehr als Quadratnetz.

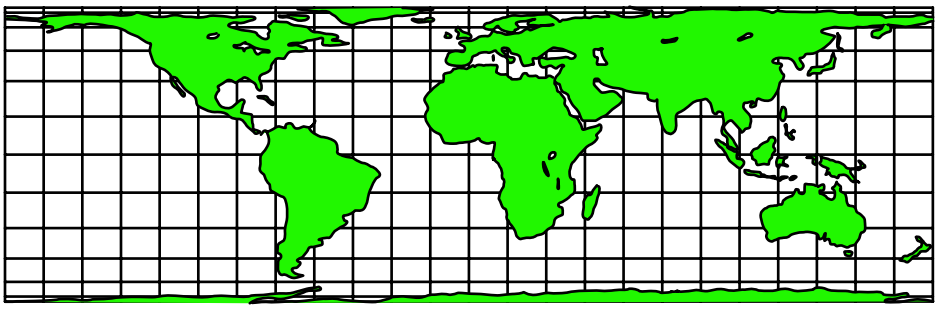

Abb. 22: Flächentreue Karte nach Archimedes/Lambert

Die Dimensionen dieser Karte sind im irrationalen Verhältnis $\frac{\pi}{1}$; die Karte kann daher nicht randbündig mit einem Quadratraster überdeckt werden. Trotzdem können wir natürlich Geraden verschiedener Steigungen einzeichnen und auf die Kugel übertragen. Für die Steigung a ergibt sich auf der Kugel eine Kurve mit der Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{1-t^2}\cos(at) \\ \sqrt{1-t^2}\sin(at) \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [-1,1]$$

4.1 Steigung 1

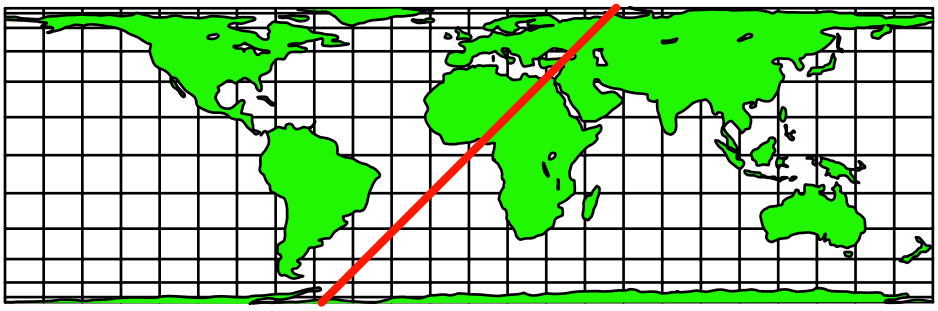

Abb. 23: Gerade mit Steigung 1

Wir erhalten auf der Kugel Kurve der Abbildung 24

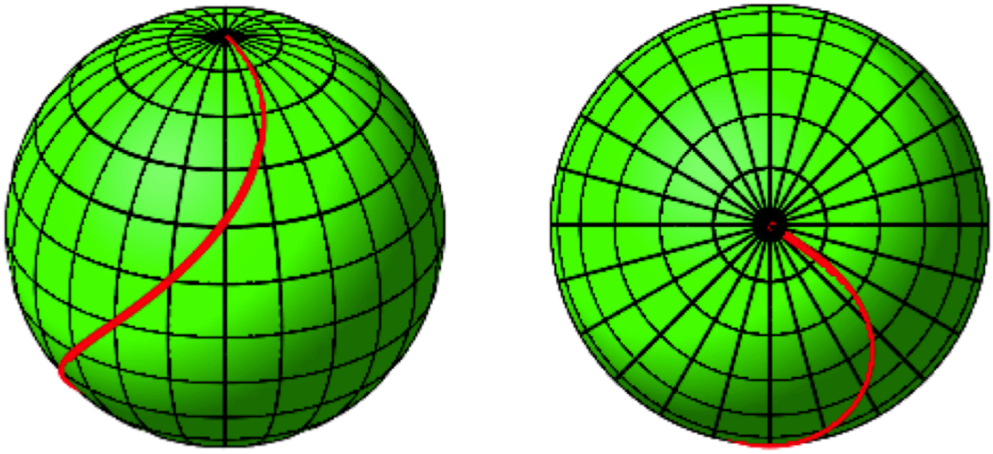

Abb. 24: Steigung 1

4.2 Steigung 2

Für die Steigung 2 ergibt sich die Kurve der Abbildung 25.

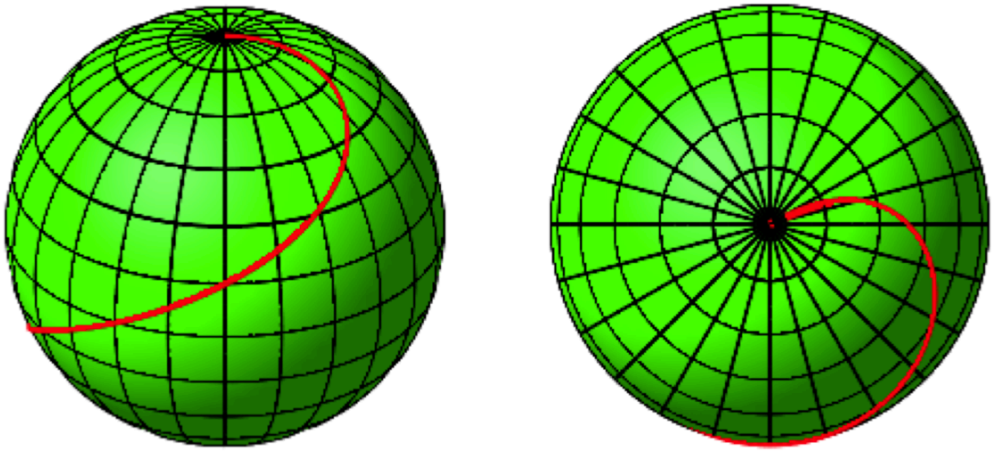

Abb. 25: Steigung 2

4.3 Steigung 24

Die Steigung 24 ergibt die Kurve der Abbildung 26.

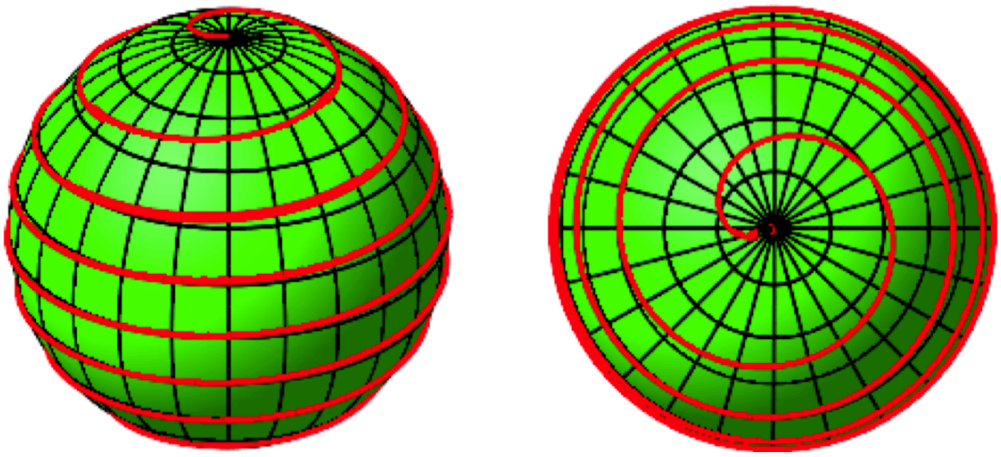

Abb. 26: Steigung 24

Ich weiß nicht, was das ebene Analogon zu diesem Spiralentyp ist.

Das Integral

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1-t^2} + a\left(1-t^2\right)}\ \mathrm{d}t$$

für die Bogenlänge von Pol zu Pol kann Maple nur numerisch berechnen.

4.4 Die Sinuskurve

In der Abbildung 27 ist eine Sinuskurve eingezeichnet. Sie läuft entlang der Diagonalen der Netzvierecke.

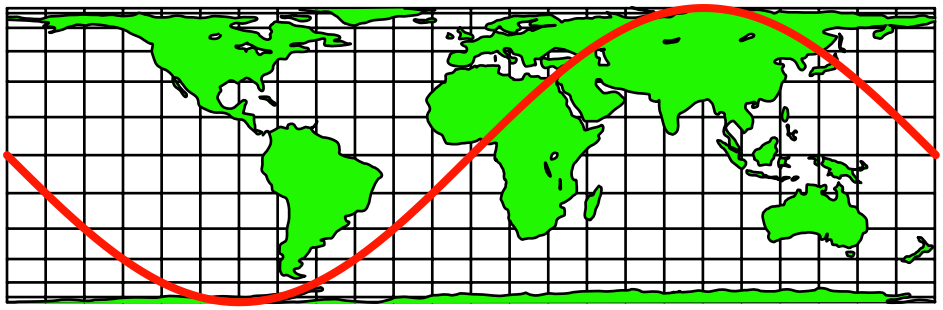

Abb. 27: Sinuskurve

Die Abbildung 28 zeigt dieselbe Kurve auf der Kugel. Es handelt sich wiederum um die *vivianische Kurve* oder *Strophoide* (Abb. 3).

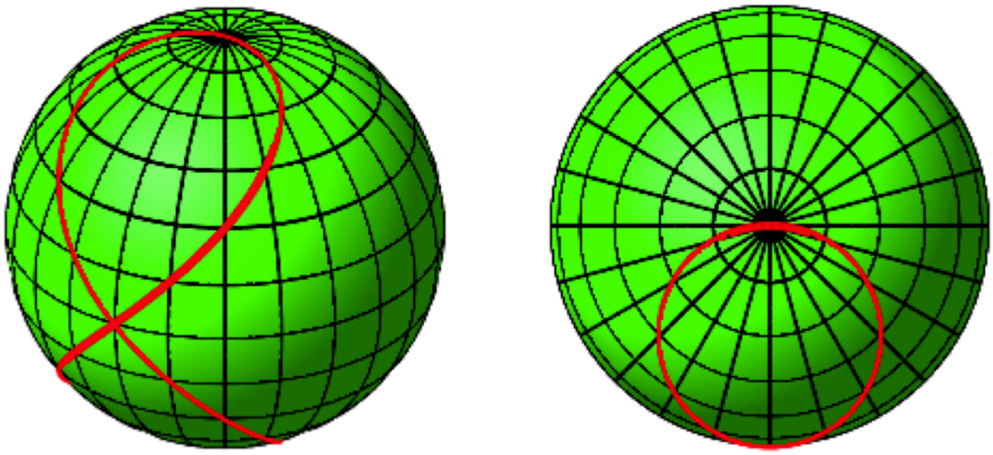

Abb. 28: Auf der Kugel