Hans Walser, [20200712]

Spiralen im regelmäßigen Vieleck

Anregung: M. E., B.

1 Worum es geht

Im Kontext von regelmäßigen n-Ecken werden Spiralen gegebener Länge gesucht.

Wir treffen dabei auf pythagoreische Dreiecke.

2 Im Dreieck

In einem gleichseitigen Dreieck setzen wir die Folge der Kantenmittendreiecke ein (Abb. 1).

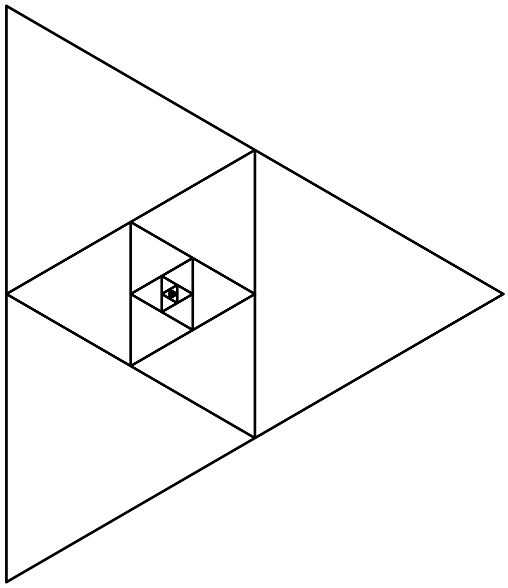

Abb. 1: Kantenmittendreiecke

Wir zeichnen eine Kantenmittenspirale ein (Abb. 2).

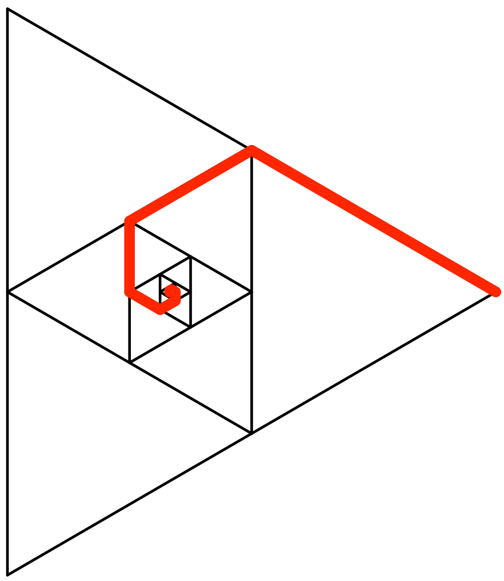

Abb. 2: Kantenmittenspirale

Bezogen auf die Seitenlänge 1 des Dreieckes hat die Kantenmittenspirale die Länge s:

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \qquad (1)$$

Die Kantenmittenspirale ist gleich groß wie die Seitenlänge des Dreiecks.

3 Im Quadrat

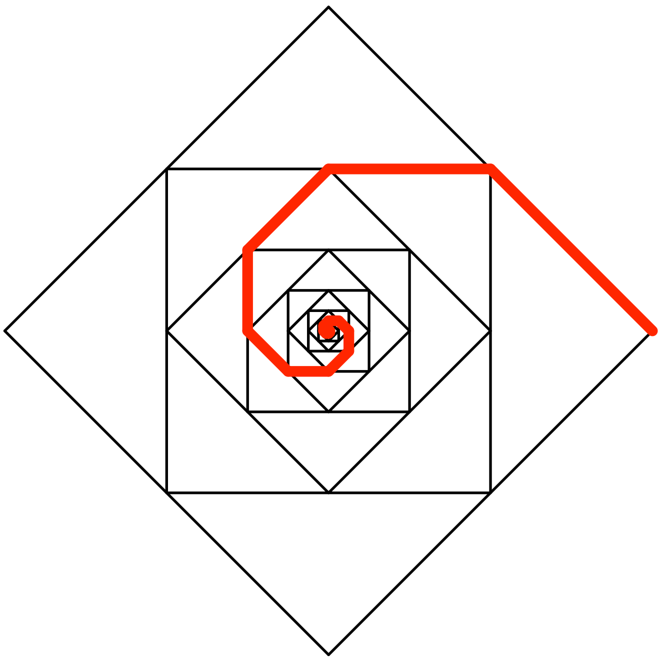

Abb. 3: Im Quadrat

Das analoge Spielchen im Quadrat (Abb. 3) führt zu einer Kantenmittenspirale der Länge s:

$$s = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{4} + \cdots = \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\tfrac{1}{2}}^{\,n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \approx 1.707106780 \qquad (2)$$

4 Problemstellung

Wie muss die Kantenmittenfigur modifiziert werden, um eine vorgegebene Spiralenlänge, insbesondere eine ganzzahlige Spiralenlänge, zu erhalten?

5 Andere Unterteilung der Kanten

Wir unterteilen die Kanten des n-Eckes in einem anderen Verhältnis.

Beispiel: Wir unterteilen die Quadratseite im Verhältnis $\frac{4}{7} : \frac{3}{7}$ (Abb. 4).

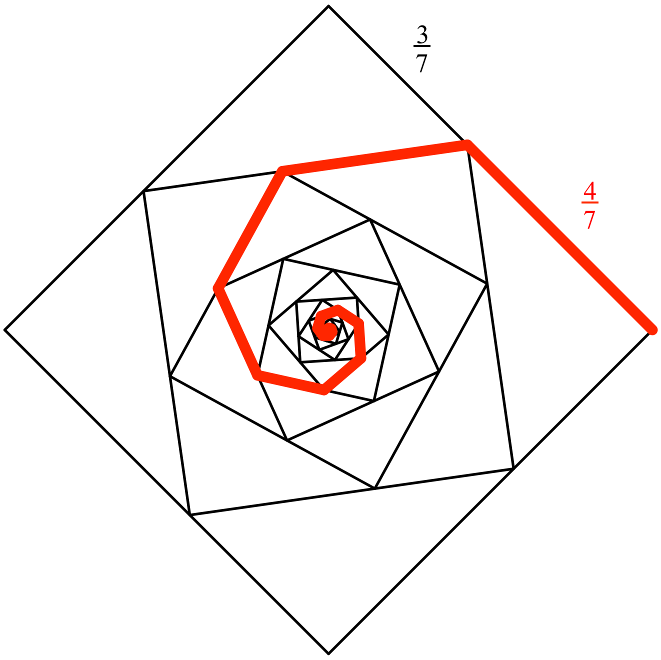

Abb. 4: Unterteilung im Verhältnis 4:3

In dieser Situation erhalten wir die Spiralenlänge 2. Dies können wir einsehen wie folgt.

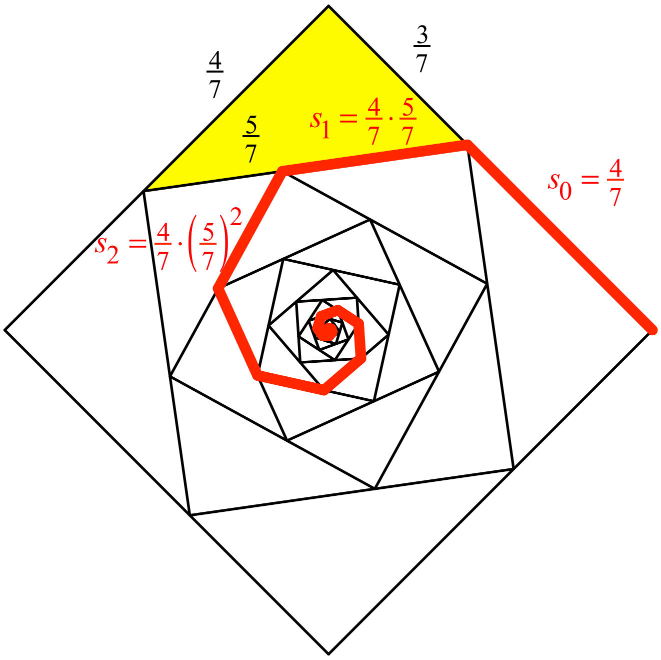

Abb. 5: Beweisfigur

Das gelbe rechtwinklige Dreieck in der Beweisfigur (Abb. 5) hat die Katheten $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{7}$ und daher die Hypotenuse $\frac{5}{7}$. Dies ist auch der Längenreduktionsfaktor $q=\frac{5}{7}$ von einem Quadrat zum nachfolgenden Quadrat.

Die Startstrecke s_0 der Spirale ist $s_0=\frac{4}{7}$. Für die nachfolgenden Strecken ergibt sich jedes Mal eine Reduktion mit dem Faktor q:

$$s_1=s_0q=\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{5}{7},\quad s_2=s_1q=\tfrac{4}{7}\cdot\left(\tfrac{5}{7}\right)^2,\quad s_3=s_2q=\tfrac{4}{7}\cdot\left(\tfrac{5}{7}\right)^3,\ldots \tag{3}$$

Damit erhalten wir für die gesamte Spiralenlänge s:

$$s=\sum_{n=0}^{\infty}s_n=\tfrac{4}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{5}{7}\right)^n=\frac{\frac{4}{7}}{1-\frac{5}{7}}=2 \tag{4}$$

Bemerkung: Das gelbe Dreieck in der Abbildung 5 ist ein pythagoreisches Dreieck.

6 Allgemein

Zu gegebener Spiralenlänge s und gegebener Eckenzahl n suchen wir ein passendes Teilverhältnis λ. (Im Beispiel der Abbildung 5 ist $s = 2$, $n = 4$ und $\lambda=\frac{4}{7}$).

In der Arbeitsfigur (Abb. 6) wurde $n = 5$ gewählt.

Wir berechnen die Seite q des gelben Dreiecks. Es hat die beiden übrigen Seiten $1-\lambda$ und λ und den der gesuchten Seite q gegenüberliegenden Winkel $\pi-\frac{2\pi}{n}$.

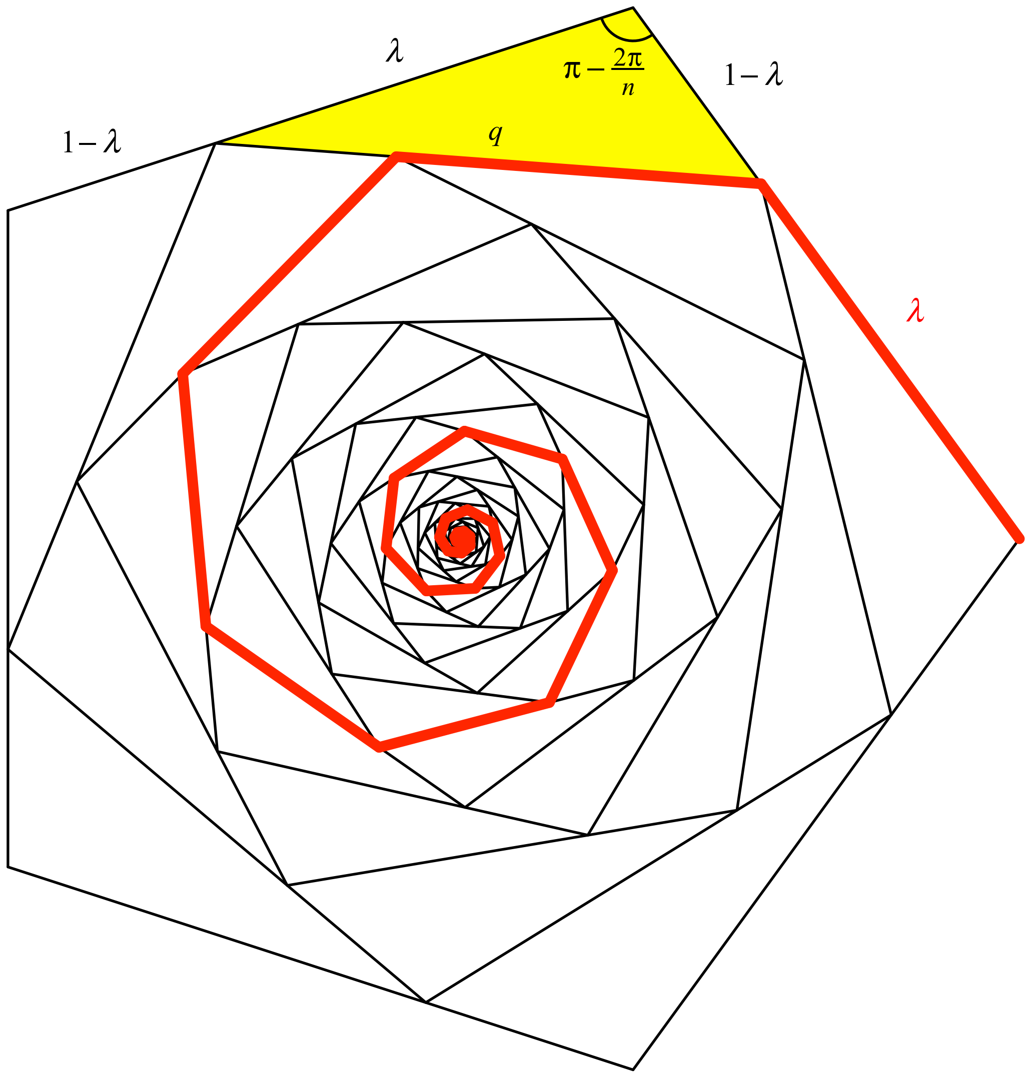

Abb. 6: Arbeitsfigur

Der Kosinus-Satz liefert:

$$q^2 = (1-\lambda)^2 + \lambda^2 - 2(1-\lambda)\lambda\cos\left(\pi - \tfrac{2\pi}{n}\right) \tag{5}$$

Dies kann umgeformt werden zu:

$$q = \sqrt{\lambda^2\left(2-\cos\left(\tfrac{2\pi}{n}\right)\right) + \lambda\left(2\cos\left(\tfrac{2\pi}{n}\right)-2\right)+1} \tag{6}$$

Da q der Längenreduktionsfaktor von einem n-Eck zum nachfolgenden ist, ergibt sich für die Spiralenlänge s:

$$s = \frac{\lambda}{1-q} \tag{7}$$

Die Beziehung (7) kann mit Einsetzen von (6) umgeformt werden zu:

$$\lambda^2\left(s^2\left(2-\cos\left(\tfrac{2\pi}{n}\right)\right)-1\right) = \lambda\left(-2s - s^2\left(2\cos\left(\tfrac{2\pi}{n}\right)-2\right)\right) \tag{8}$$

Die quadratische Gleichung (8) hat die triviale erste Lösung $\lambda = 0$, welche für uns nicht relevant ist. Die zweite Lösung ist unser gesuchtes Teilverhältnis:

$$\lambda = \frac{2s+s^2\left(2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)-2\right)}{1-s^2\left(2-2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)} \tag{9}$$

7 Ganzzahlige Spiralenlängen

In den Abbildungen 2 und 4 hatten wir ganzzahlige Spiralenlängen. Wir können nun umgekehrt nach Teilverhältnissen λ fragen, welche zu ganzzahligen Spiralenlängen führen.

Rationale Teilverhältnisse ergeben sich offenbar (unbewiesene Vermutung) nur für die Eckenzahlen n = 3, 4 und 6. Es zeigt sich, dass wir dabei auf pythagoreische Dreiecke stoßen.

7.1 Im Quadrat

Die Tabelle 1 zeigt für $n = 4$ und die natürlichen Zahlen für s die zugehörigen Teilverhältnisse. Ebenso ist die Ergänzung der Teilverhältnisse auf 1 angegeben. Die Zähler b beziehungsweise a (Reihenfolge beachten) sind die Katheten eines pythagoreischen Dreiecks mit der Hypotenuse c. Es handelt sich dabei um die „fast gleichschenkligen" pythagoreischen Dreiecke. Die Hypotenuse c ist jeweils um 1 größer als die Kathete b.

n	s	λ	$1-\lambda$	b	a	c
4	1	0	1	0	1	1
4	2	4/7	3/7	4	3	5
4	3	12/17	5/17	12	5	13
4	4	24/31	7/31	24	7	25
4	5	40/49	9/49	40	9	41
4	6	60/71	11/71	60	11	61
4	7	84/97	13/97	84	13	85
4	8	112/127	15/127	112	15	113
4	9	144/161	17/161	144	17	145
4	10	180/199	19/199	180	19	181
4	11	220/241	21/241	220	21	221
4	12	264/287	23/287	264	23	265
4	13	312/337	25/337	312	25	313
4	14	364/391	27/391	364	27	365
4	15	420/449	29/449	420	29	421
4	16	480/511	31/511	480	31	481
4	17	544/577	33/577	544	33	545
4	18	612/647	35/647	612	35	613
4	19	684/721	37/721	684	37	685
4	20	760/799	39/799	760	39	761

Tab. 1: Im Quadrat

7.2 Im gleichseitigen Dreieck

Die Tabelle 2 zeigt für $n = 3$ und die natürlichen Zahlen für s die zugehörigen Teilverhältnisse. Ebenso ist die Ergänzung der Teilverhältnisse auf 1 angegeben. Die Zähler b beziehungsweise a (Reihenfolge beachten) sind die Schenkel des 60°-Winkels eines pythagoreischen 60°-Dreieckes. Die Seite c ist jeweils um s – 1 größer als die Seite b.

n	s	λ	$1-\lambda$	b	a	c
3	1	1/2	1/2	1	1	1
3	2	8/11	3/11	8	3	7
3	3	21/26	5/26	21	5	19
3	4	40/47	7/47	40	7	37
3	5	65/74	9/74	65	9	61
3	6	96/107	11/107	96	11	91
3	7	133/146	13/146	133	13	127
3	8	176/191	15/191	176	15	169
3	9	225/242	17/242	225	17	217
3	10	280/299	19/299	280	19	271
3	11	341/362	21/362	341	21	331
3	12	408/431	23/431	408	23	397
3	13	481/506	25/506	481	25	469
3	14	560/587	27/587	560	27	547
3	15	645/674	29/674	645	29	631
3	16	736/767	31/767	736	31	721
3	17	833/866	33/866	833	33	817
3	18	936/971	35/971	936	35	919
3	19	1045/1082	37/1082	1045	37	1027
3	20	1160/1199	39/1199	1160	39	1141

Tab. 2: Im gleichseitigen Dreieck

Die Abbildung 7 illustriert das zweite Beispiel mit den Seiten 3, 8 und 7.

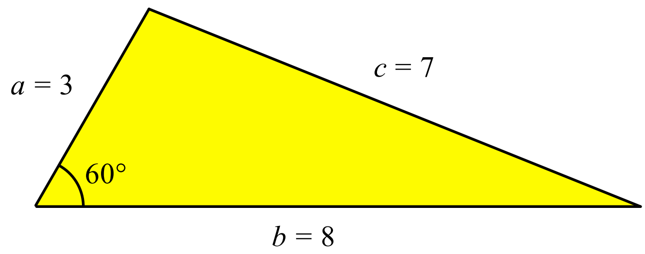

Abb. 7: Pythagoreisches 60°-Dreieck

7.3 Im regelmäßigen Sechseck

Die Tabelle 3 zeigt für $n = 6$ und die natürlichen Zahlen für s die zugehörigen Teilverhältnisse. Ebenso ist die Ergänzung der Teilverhältnisse auf 1 angegeben. Die Zähler b beziehungsweise a (Reihenfolge beachten) sind die Schenkel des 120°-Winkels eines pythagoreischen 120°-Dreieckes.

n	s	λ	$1-\lambda$	b	a	c
6	2	0	1	0	1	1
6	3	3/8	5/8	3	5	7
6	4	8/15	7/15	8	7	13
6	5	5/8	3/8	5	3	7
6	6	24/35	11/35	24	11	31
6	7	35/48	13/48	35	13	43
6	8	16/21	5/21	16	5	19
6	9	63/80	17/80	63	17	73
6	10	80/99	19/99	80	19	91
6	11	33/40	7/40	33	7	37
6	12	120/143	23/143	120	23	133
6	13	143/168	25/168	143	25	157
6	14	56/65	9/65	56	9	61
6	15	195/224	29/224	195	29	211
6	16	224/255	31/255	224	31	241
6	17	85/96	11/96	85	11	91
6	18	288/323	35/323	288	35	307
6	19	323/360	37/360	323	37	343
6	20	120/133	13/133	120	13	127

Tab. 3: Im regelmäßigen Sechseck

Die Abbildung 8 illustriert das zweite Beispiel mit den Seiten 5, 3 und 7.

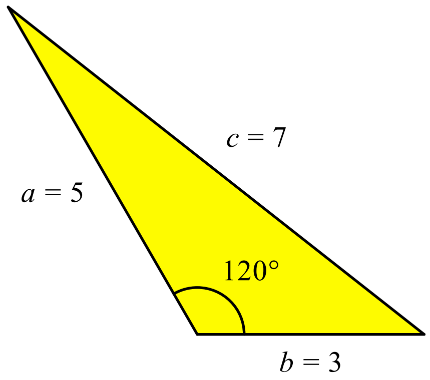

Abb. 8: Pythagoreisches 120°-Dreieck

7.4 Im regelmäßigen Fünfeck

Die Tabelle 4 zeigt für $n = 5$ und die natürlichen Zahlen für s die zugehörigen Teilverhältnisse. Sie sind vermutlich nicht rational.

n	s	λ
5	1	–1.618033981
5	2	0.3374359374
5	3	0.5628489493
5	4	0.6684264726
5	5	0.7317368721
5	6	0.7743625681
5	7	0.8051451706
5	8	0.8284652236
5	9	0.8467629765
5	10	0.8615126043
5	11	0.8736598069
5	12	0.8838402059
5	13	0.8924972803
5	14	0.8999501004
5	15	0.9064342135
5	16	0.9121273596
5	17	0.9171662166
5	18	0.9216576328
5	19	0.9256863564
5	20	0.9293204768

Tab. 4: Im regelmäßigen Fünfeck

Websites

Hans Walser: Kantenmittenspirale
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kantenmittenspirale/Kantenmittenspirale.htm

Literatur

Walser, H. (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.