

Hans Walser, [20180622]

Steigung und Steigungswinkel

Anregung: M. H., V.

1 Worum es geht

Schülerinnen und Schüle verwechseln gelegentlich die Begriffe *Steigung* und *Steigungswinkel*.

Gibt es ein Beispiel, wo die Maßzahlen der Steigung in % und der Steigungswinkel in ° übereinstimmen?

2 Prozent und Grad

Leider gibt es außer der trivialen Lösung $\tan(0^\circ) = 0\%$ keine weitere Lösung.

3 Prozent und Minuten

Wenn wir den Steigungswinkel α nicht in °, sondern in Minuten angeben, haben wir eine Lösung. Aus

$$\alpha = 5335.577' = 88^\circ 55.577' \quad (1)$$

ergibt sich:

$$\tan(\alpha) = \tan(5335.577') = \tan(88^\circ 55.577') = 53.35577 = 5335.577\% \quad (2)$$

4 Weitere Beispiele

Es geht auch mit anderen Maßeinheiten.

4.1 Prozent und Sekunden

Es ist:

$$\tan(323'936'') \approx 323'936\% \quad (3)$$

4.2 Promille und Minuten

Es ist:

$$\tan(4675.671') \approx 4675.671\text{‰} \quad (4)$$

4.3 Promille und Sekunden

Es ist:

$$\tan(323'362'') \approx 323'362 \text{ ‰} \quad (5)$$

5 Hintergrund

5.1 Problemstellung

Wir arbeiten mit einem Winkelmaß, welches den Vollkreis in N Teile unterteilt. Für das $^\circ$ -Maß ist dann $N = 360$.

Weiter soll die Steigung in $\%$ angegeben werden.

Wir nehmen weiter an, dass die Tangensfunktion im Bogenmaß operiert.

Damit suchen wir Lösungen für t der Gleichung:

$$\tan\left(t \frac{2\pi}{N}\right) = \frac{t}{100} \quad (6)$$

Die triviale Lösung ist $t = 0$.

Die Gleichung (6) formen wir um:

$$100 \tan\left(t \frac{2\pi}{N}\right) = t \quad (7)$$

5.2 Grafische Lösung

Wir vergleichen die Funktionsgraphen der beiden Funktionen:

$$f : t \mapsto 100 \tan\left(t \frac{2\pi}{N}\right) \text{ (rote Kurve)} \quad (8)$$

$$g : t \mapsto t \text{ (blaue Kurve)} \quad (9)$$

Gesucht sind die Schnittpunkte der beiden Kurven.

5.2.1 $N = 360$

Für $N = 360$, also das $^\circ$ -Maß, ergeben sich die beiden Kurven der Abbildung 1.

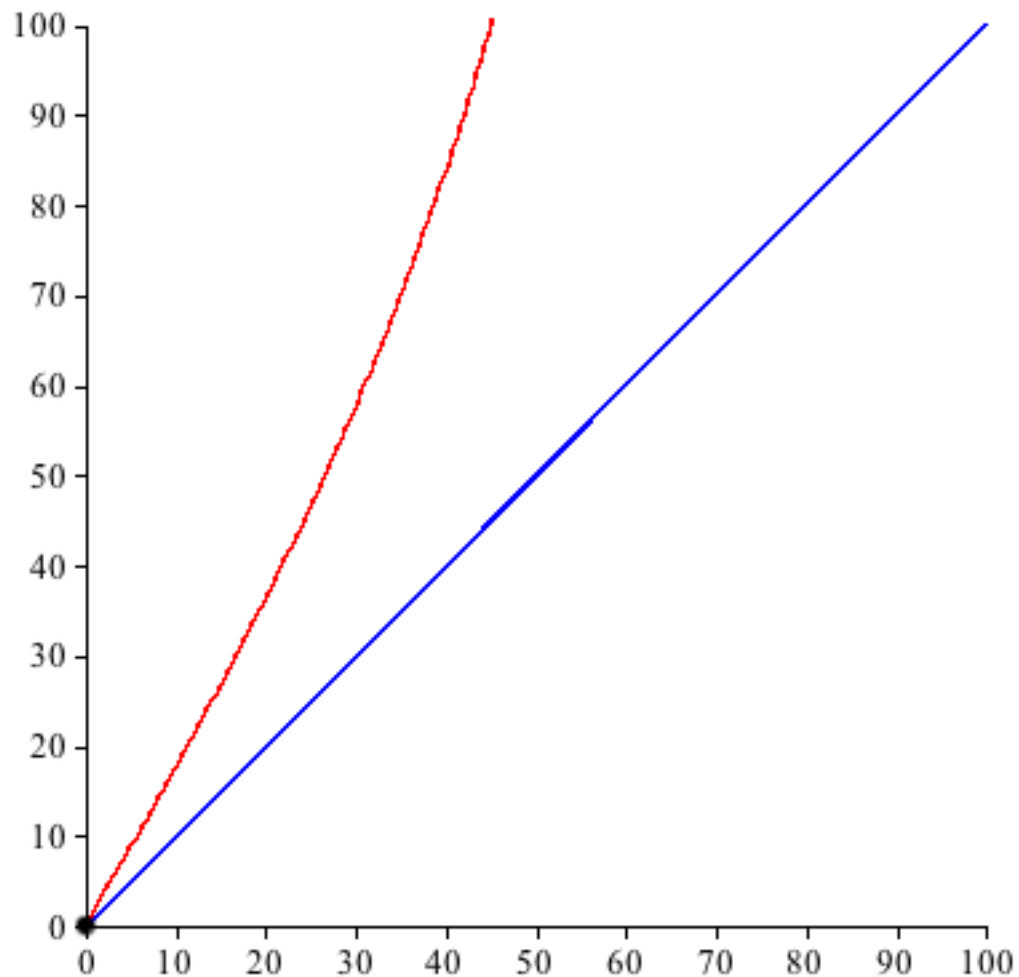


Abb. 1: Situation im $^\circ$ -Maß

Wir haben nur den trivialen Schnittpunkt $(0, 0)$.

5.2.2 $N = 1000$

Für $N = 1000$ ergeben sich die beiden Kurven der Abbildung 2.

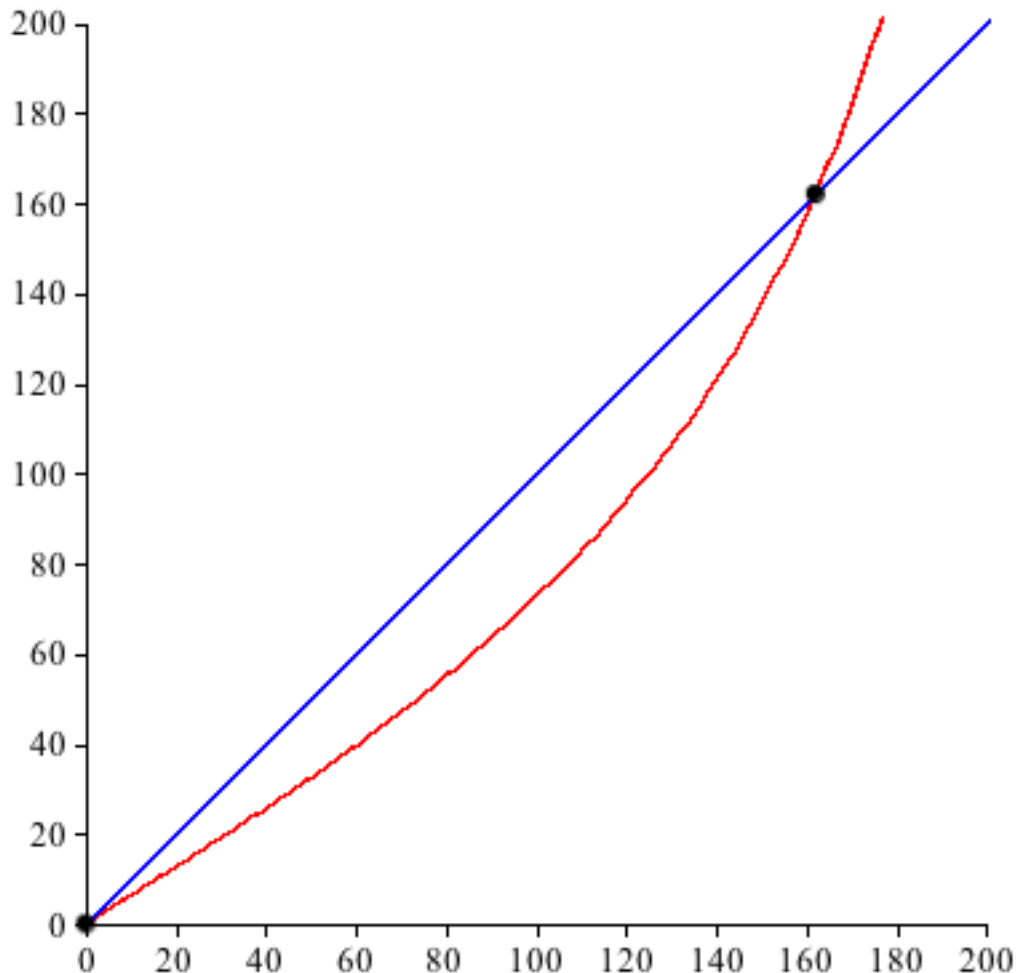


Abb. 2: $N = 1000$

Neben dem trivialen Schnittpunkt haben wir den Schnittpunkt $(161.97, 161.97)$. Der Schnittpunkt wurde mit dem Verfahren von Newton-Raphson numerisch ermittelt.

5.3 Wo ist die Grenze?

Der Vergleich der beiden Beispiele $N = 360$ und $N = 1000$ legt nahe, dass es dazwischen eine Grenze gibt, so dass es für kleinere N nur die triviale Lösung, für größere N aber auch eine nichttriviale Lösung gibt.

Im Grenzfall hat die Funktion f im Ursprung die Steigung 1. Aus (8) ergibt sich:

$$f' : t \mapsto \frac{100}{\cos^2\left(t\frac{2\pi}{N}\right)} \frac{2\pi}{N} \quad (10)$$

Die Bedingung

$$f'(0) = 1 \quad (11)$$

führt auf:

$$N = 100 \cdot 2\pi \approx 628 \quad (12)$$

Für das °-Maß ist $N = 360$ und damit unterhalb dieser Grenze.

Wenn wir in Minuten rechnen, ist $N = 360 \cdot 60 = 21600$ und damit oberhalb dieser Grenze. Analog für Sekunden.

Wenn wir mit Promillen arbeiten, ist in (6), (7), (8) sowie (10) und (12) der Faktor 100 durch 1000 zu ersetzen. Die kritische Grenze ist dann $N = 1000 \cdot 2\pi \approx 6283$.

Last modified 23. Juni 2018