Hans Walser, [20141129a], [20141201]

Sterbende Kaninchen

1 Beispiele

1.1 Sterben nach dem zweiten Wurf

Wir ändern die übliche Kaninchen-Aufgabe von Fibonacci so ab, dass die Kaninchenpaare nach dem Wurf des zweiten Kaninchenpaares sterben.

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen den Baum.

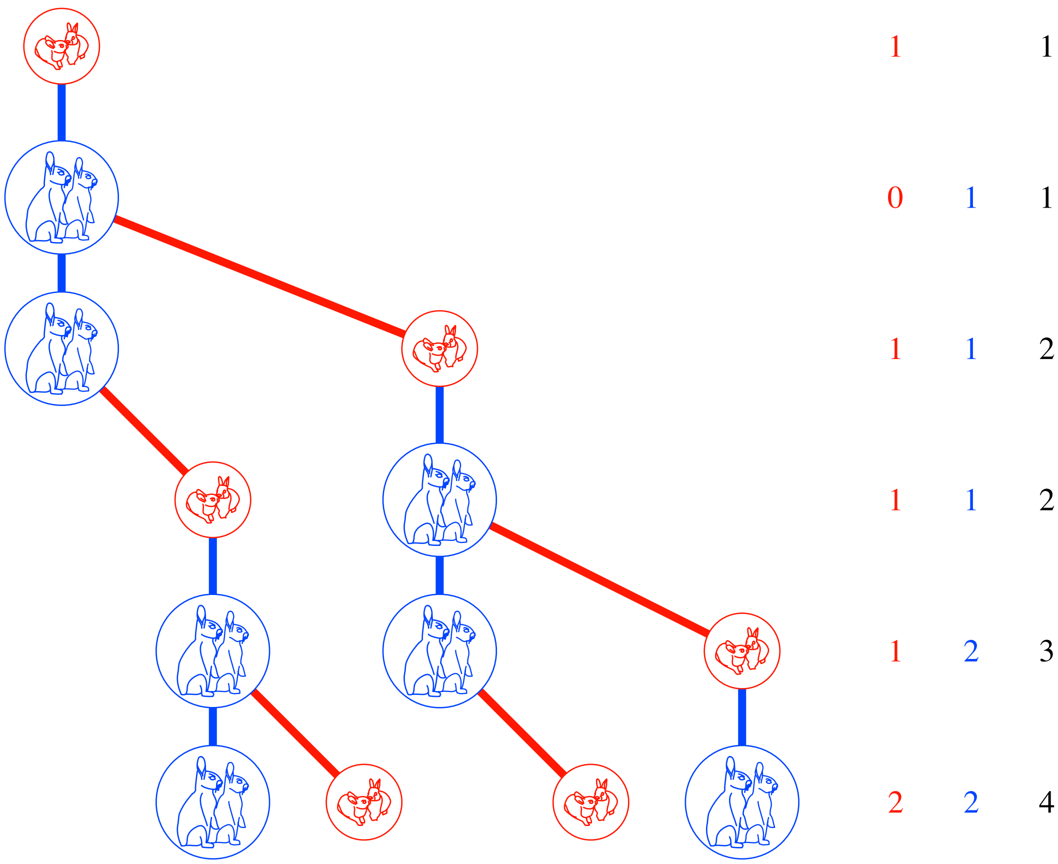
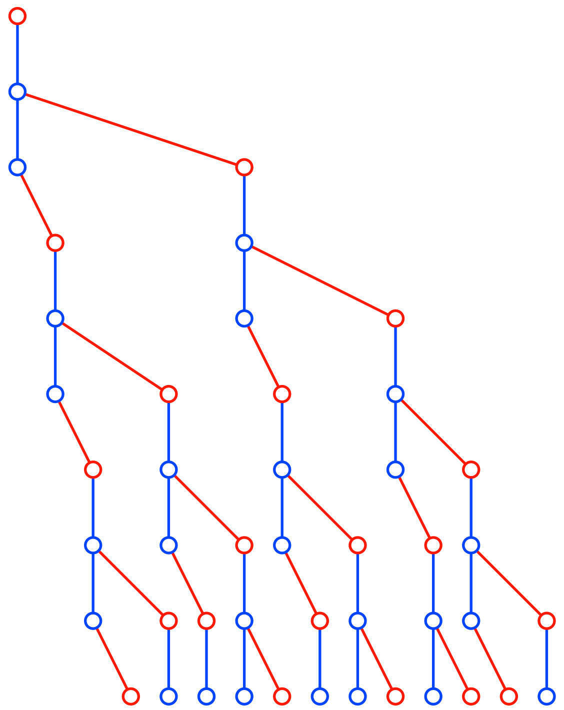


Abb. 1: Baum

Zu jeder Generation geben die roten Zahlen die Anzahl der jungen Paare, die blauen Zahlen die Anzahl der erwachsenen Paare und die schwarzen Zahlen die Totalzahl der Paare an.



1	0	1
0	1	1
1	1	2
1	1	2
1	2	3
2	2	4
2	3	5
3	4	7
4	5	9
5	7	12

Abb. 2: Baum

Für alle drei Folgen gilt die Rekursion:

$$f_{n+3} = f_{n+1} + f_n$$

Die Tabelle 1 gibt die Totalzahlen für die ersten 20 Generationen. Es sind auch die Wachstumsfaktoren $q_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ angegeben.

n	f_n	$q_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$	n	f_n	$q_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$
1	1	1.	11	16	1.312500000
2	1	2.	12	21	1.333333333
3	2	1.	13	28	1.321428571
4	2	1.500000000	14	37	1.324324324
5	3	1.333333333	15	49	1.326530612
6	4	1.250000000	16	65	1.323076923
7	5	1.400000000	17	86	1.325581395
8	7	1.285714286	18	114	1.324561404
9	9	1.333333333	19	151	1.324503311
10	12	1.333333333	20	200	1.325000000

Tab. 1: Anzahlen und Wachstumsfaktoren

Der Limes

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

genügt der kubischen Gleichung:

$$\gamma^3 = \gamma + 1$$

Diese hat die reelle Lösung:

$$\gamma = \tfrac{1}{6}\left(108 + 12\sqrt{69}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{\left(108+12\sqrt{69}\right)^{\frac{1}{3}}} \approx 1.32471795724474$$

Wir haben näherungsweise ein exponentielles Wachstum.

Die Abbildung 3 zeigt die grafische Lösung der kubischen Gleichung.

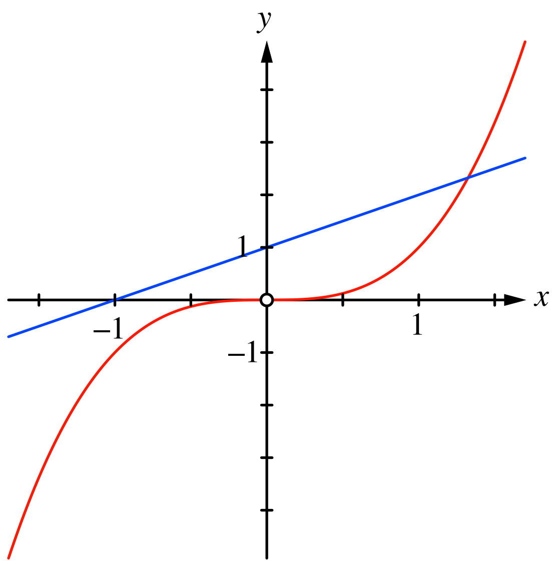


Abb. 3: Grafische Lösung

1.2 Sterben nach dem dritten Wurf

Die Abbildung 4 zeigt den Baum für die Situation, dass die Kaninchenpaare nach dem dritten Wurf sterben.

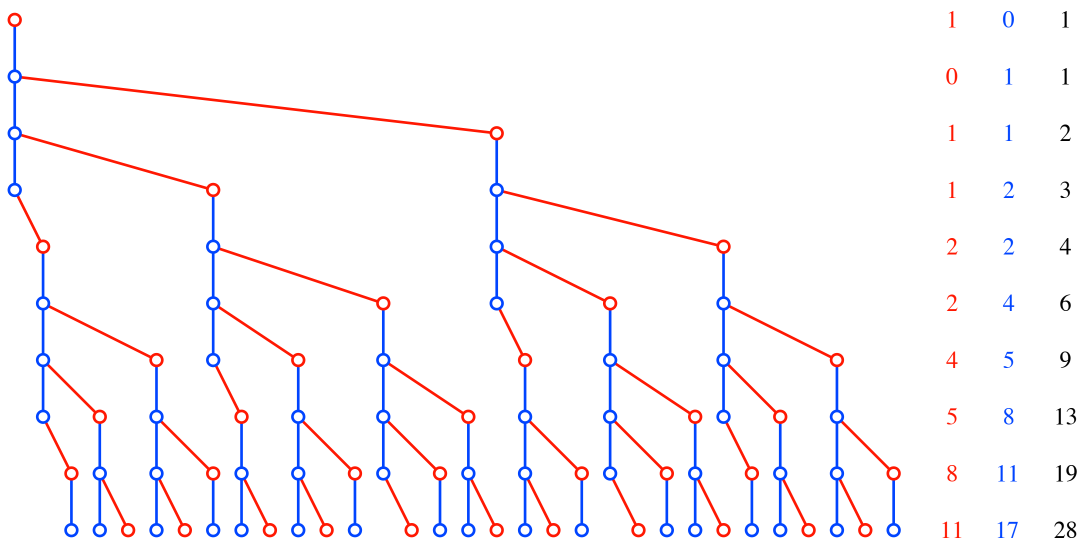


Abb. 4: Baum

Die drei Folgen sind nicht gleich, haben aber alle die gleiche Rekursion:

$$f_{n+4} = f_{n+2} + f_{n+1} + f_n$$

Die Tabelle 2 gibt die Totalzahlen für die ersten 20 Generationen. Es sind auch die Wachstumsfaktoren $q_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ angegeben.

n	f_n	$q_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$	n	f_n	$q_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$
1	1	1.	11	41	1.463414634
2	1	2.	12	60	1.466666667
3	2	1.500000000	13	88	1.465909091
4	3	1.333333333	14	129	1.465116279
5	4	1.500000000	15	189	1.465608466
6	6	1.500000000	16	277	1.465703971
7	9	1.444444444	17	406	1.465517241
8	13	1.461538462	18	595	1.465546218
9	19	1.473684211	19	872	1.465596330
10	28	1.464285714	20	1278	1.465571205

Tab. 2: Anzahlen und Wachstumsfaktoren

Der Limes

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

genügt der Gleichung vierten Grades:

$$\gamma^4 = \gamma^2 + \gamma + 1$$

Diese hat neben der trivialen Lösung -1 die reelle Lösung:

$$\gamma = \tfrac{1}{6}\left(116 + 12\sqrt{93}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3\left(116+12\sqrt{93}\right)^{\frac{1}{3}}} + \tfrac{1}{3} \approx 1.46557123187675$$

Wir haben näherungsweise ein exponentielles Wachstum.
Die Abbildung 5 zeigt die grafische Lösung der Gleichung vierten Grades.

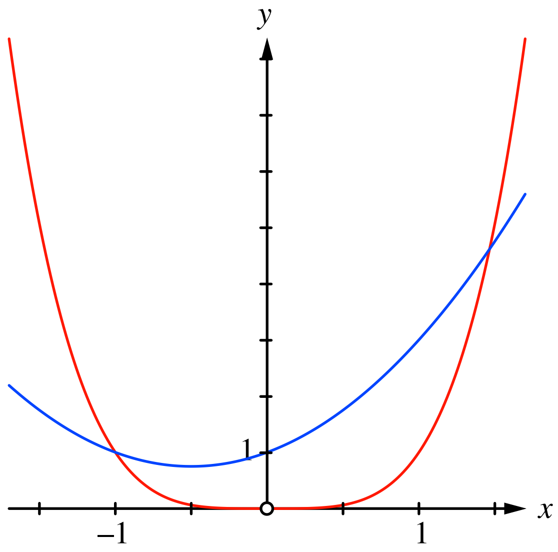


Abb. 5: Grafische Lösung

1.3 Sterben nach dem vierten Wurf

Die Abbildung 6 zeigt den Baum für die Situation, dass die Kaninchenpaare nach dem vierten Wurf sterben.

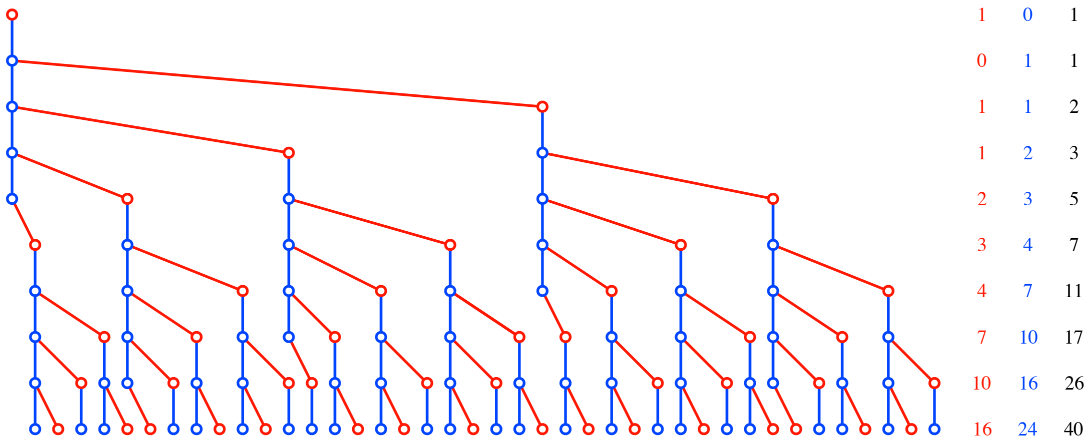


Abb. 6: Baum

Die drei Folgen sind nicht gleich, haben aber alle die gleiche Rekursion:

$$f_{n+5} = f_{n+3} + f_{n+2} + f_{n+1} + f_n$$

Die Tabelle 3 gibt die Totalzahlen für die ersten 20 Generationen. Es sind auch die Wachstumsfaktoren $q_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ angegeben.

n	f_n	$q_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$	n	f_n	$q_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$
1	1	1.	11	61	1.540983607
2	1	2.	12	94	1.531914894
3	2	1.500000000	13	144	1.534722222
4	3	1.666666667	14	221	1.533936652
5	5	1.400000000	15	339	1.533923304
6	7	1.571428571	16	520	1.534615385
7	11	1.545454545	17	798	1.533834586
8	17	1.529411765	18	1224	1.534313725
9	26	1.538461538	19	1878	1.534078807
10	40	1.525000000	20	2881	1.534189518

Tab. 3: Anzahlen und Wachstumsfaktoren

Der Limes

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} q_n = \lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

genügt der Gleichung fünften Grades:

$$\gamma^5 = \gamma^3 + \gamma^2 + \gamma + 1$$

Diese hat im Intervall $(0,2)$ die Lösung $\gamma = 1.534157745$. Wir haben näherungsweise ein exponentielles Wachstum.

Die Abbildung 7 zeigt die grafische Lösung der Gleichung fünften Grades.

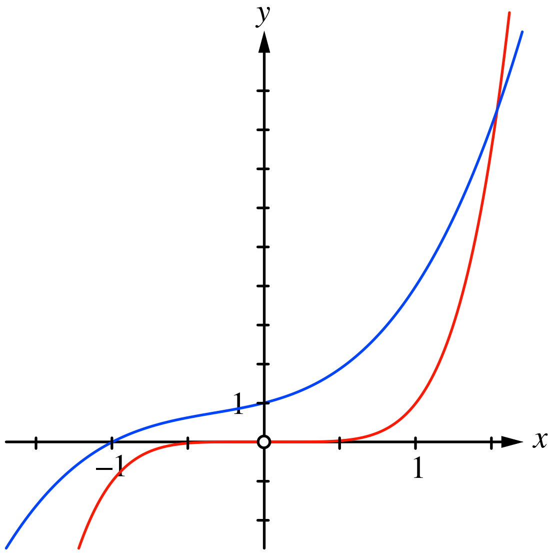


Abb. 7: Grafische Lösung

2 Allgemein

Beim Absterben nach dem k-ten Wurf ergibt sich die Rekursion:

$$f_{n+k+1} = f_{n+k-1} + f_{n+k-2} + \cdots + f_{n+1} + f_n = \sum_{j=0}^{k-1} f_{n+j}$$

Die $k+1$ Startwerte sind die Fibonacci-Zahlen. Der Limes

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

genügt der Gleichung vom Grad $k+1$:

$$\gamma^{k+1} = \gamma^{k-1} + \gamma^{k-2} + \cdots + \gamma + 1 = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma^j$$

Die Tabelle 4 zeigt die Grenzwerte γ in Abhängigkeit von k.

k	γ	k	γ
1	1.	26	1.618032341
2	1.324717957	27	1.618032970
3	1.465571232	28	1.618033359
4	1.534157745	29	1.618033600
5	1.570147312	30	1.618033748
6	1.590005374	31	1.618033840
7	1.601347334	32	1.618033897
8	1.607982728	33	1.618033932
9	1.611930397	34	1.618033954
10	1.614306823	35	1.618033967
11	1.615749203	36	1.618033975
12	1.616629684	37	1.618033980
13	1.617169296	38	1.618033984
14	1.617500905	39	1.618033986
15	1.617705070	40	1.618033987
16	1.617830929	41	1.618033988
17	1.617908582	42	1.618033988
18	1.617956520	43	1.618033988
19	1.617986125	44	1.618033988
20	1.618004414	45	1.618033989
21	1.618015713	46	1.618033989
22	1.618022695	47	1.618033989
23	1.618027009	48	1.618033989
24	1.618029675	49	1.618033989
25	1.618031323	50	1.618033989

Tab. 4: Wachstumsfaktoren

Die Wachstumsfaktoren streben gegen den Goldenen Schnitt.

Beweisskizze:

Die Gleichung

$$\gamma^{k+1} = \gamma^{k-1} + \gamma^{k-2} + \cdots + \gamma + 1 = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma^{j} = \frac{\gamma^{k}-1}{\gamma-1}$$

kann umgeformt werden zu

$$\gamma^{2} - \gamma - 1 + \frac{1}{\gamma^{k}} = 0$$

Für $\gamma > 1$ verschwindet bei $k \to \infty$ der Störterm $\frac{1}{\gamma^k}$. Übrig bleibt die quadratische Gleichung $\gamma^2 - \gamma - 1 = 0$ mit der Lösung des Goldenen Schnittes Φ.