Hans Walser, [20150625]

Sterne

1 Worum geht es?

Es werden Verallgemeinerungen des Fibonacci-Sterns (Walser 2012, S. 31 und Walser 2013, S. 108) und des Goldenen Sterns (Walser 2013, S. 109) vorgestellt.

2 Verallgemeinerung des Fibonacci-Sterns

2.1 Beispiel

Wir illustrieren das Verfahren an einem Beispiel mit einem Stern mit $k = 8$ Spitzen.

Wir beginnen gemäß Abbildung 1a mit einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Spitzenwinkel $\frac{360°}{k} = \frac{360°}{8} = 45°$. Dieses Dreieck hat die Basiswinkel 67.5°.

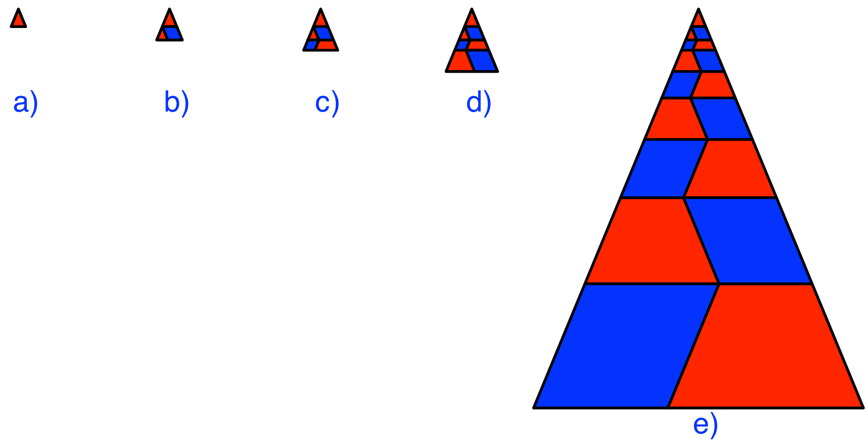


Abb. 1: Vorgehen für *k* = 8

Unter dieses Dreieck passen wir rechts einen Rhombus mit dem spitzen Winkel 67.5° ein und daneben ein gleichschenkliges Dreieck gemäß Abbildung 1b. Dieses Dreieck ist ähnlich zum Startdreieck.

Dann passen wir links unter das neue gleichschenklige Dreieck einen Rhombus mit dem spitzen Winkel 67.5° ein und rechts daneben ein gleichschenkliges Trapez (Abb. 1c). Dieses gleichschenklige Trapez hat Basiswinkel 67.5°.

Weiter passen wir rechts unter das Trapez einen Rhombus ein und ergänzen links mit einem gleichschenkligen Trapez (Abb. 1d).

So fahren wir weiter und passen abwechslungsweise links und rechts Rhomben ein und ergänzen mit gleichschenkligen Trapezen (Abb. 1e). Es entsteht ein großes gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel 45° an der Spitze. Die Trapeze haben zwar alle die gleichen Winkel, sind aber nicht ähnlich. Die Seitenverhältnisse differieren geringfügig.

Nun entfernen wir die Rhomben (Abb. 2a) und klappen die Trapeze (und die Dreiecke ganz oben) an den gelenkig gedachten gemeinsamen Punkten zusammen (Abb. 2b).

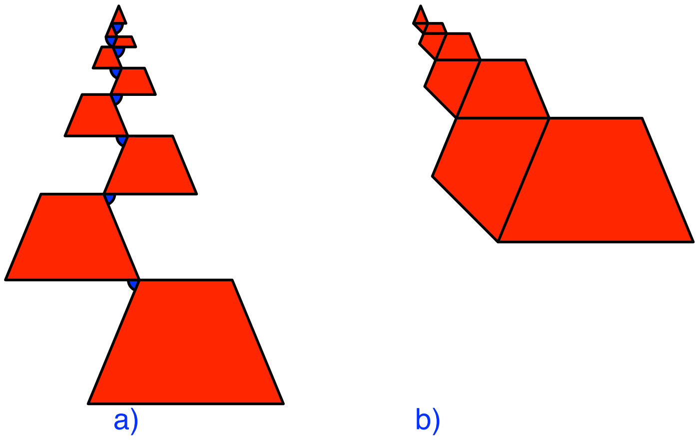


Abb. 2: Entfernen der Rhomben. Zusammenklappen

Mit $k = 8$ Kopien dieser Figur können wir nun einen Stern bauen (Abb. 3). Im Zentrum des Sterns erkennen wir ein regelmäßiges Achteck.

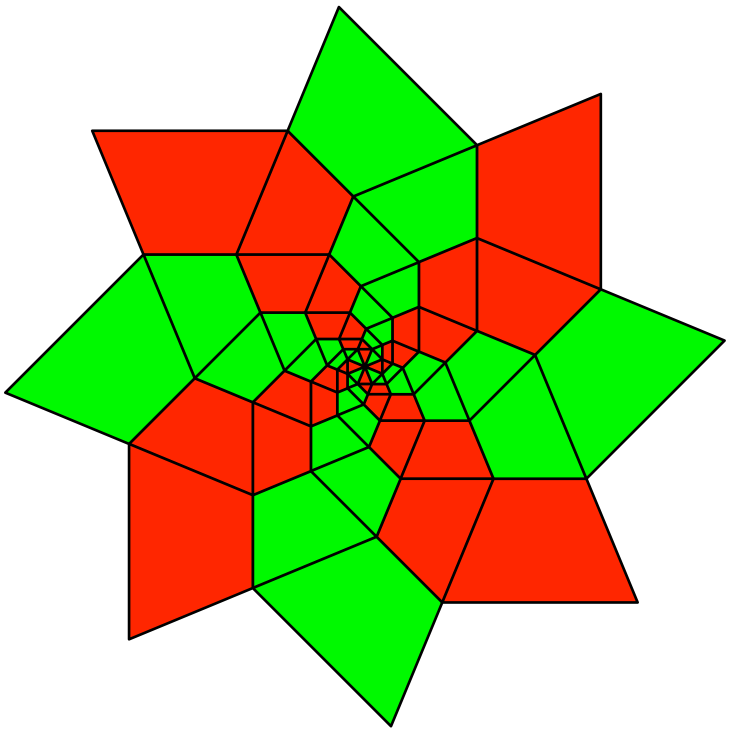


Abb. 3: Stern

Die Abbildung 4 zeigt den Stern in monochromer Ausführung.

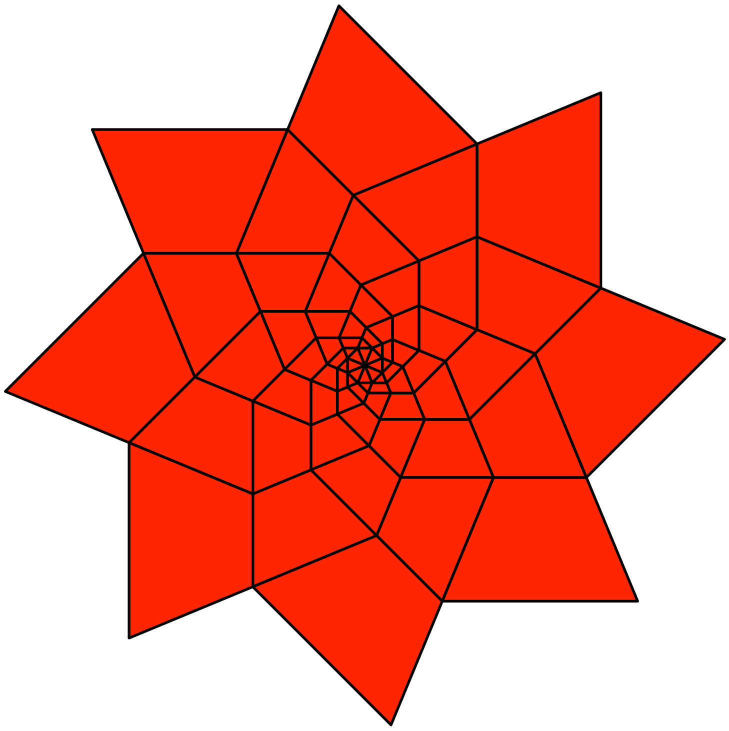


Abb. 4: Stern mit acht Spitzen

2.2 Zahlentheoretischer Hintergrund

Wir definieren eine Zahlenfolge a_n rekursiv wie folgt.

Startwerte:

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

Rekursion:

$$a_n = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{k}\right)a_{n-1} + a_{n-2}$$

Das ist eine verallgemeinerte Fibonacci-Rekursion.

In unserem Beispiel mit $k = 8$ heißt das:

$$a_n = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{8}\right)a_{n-1} + a_{n-2}$$

Die Tabelle 1 gibt die ersten Werte.

n	a_n exakter Wert	a_n numerisch	$\frac{a_{n+1}}{a_n}$
0	0	0	–
1	1	1	0.7653668650
2	$2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$	0.7653668650	2.071929830
3	$3-\sqrt{2}$	1.585786438	1.248008693
4	$-2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(-4+\sqrt{2}\right)$	1.979075260	1.566643336
5	$13-7\sqrt{2}$	3.100505066	1.403674242
6	$-2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(-17+8\sqrt{2}\right)$	4.352099098	1.477782876
7	$63-40\sqrt{2}$	6.43145752	1.442056260
8	$-32\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(-5+3\sqrt{2}\right)$	9.274523581	1.458821090
9	$319-216\sqrt{2}$	13.5298706	1.450851875
10	$-6\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(-133+88\sqrt{2}\right)$	19.62983813	1.454617140

Tab. 1: Zahlenfolge

Diese Zahlen können im Dreieck der Abbildung 1 als Streckenlängen visuell dargestellt werden gemäß Abbildung 5. Wer Lust hat, kann sich überlegen, wo die Null von a_0 steckt und was es mit dem grünen Dreieck an der Spitze auf sich hat (Tipp: Folge ins Negative fortsetzen).

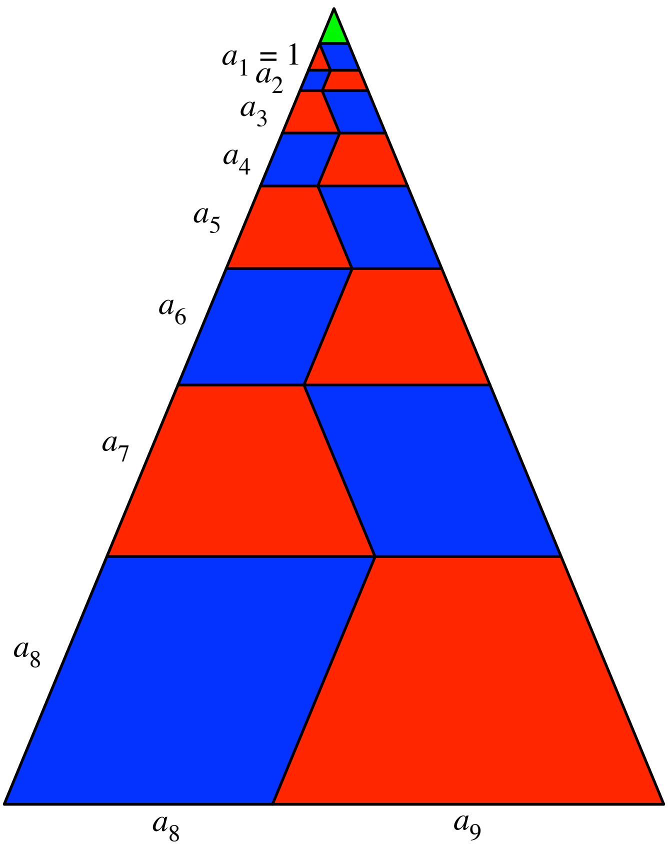
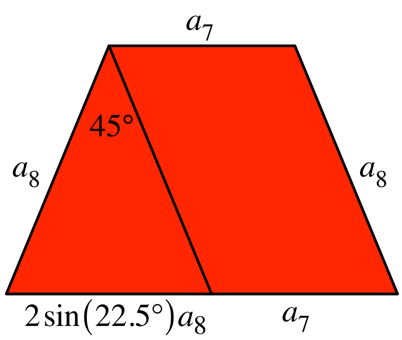


Abb. 5: Visualisierung

Die Abbildung 6 gibt exemplarisch eine Erklärung für diesen Sachverhalt. Die Rekursion steckt in den Trapezen. Wir müssen in den Trapezen noch ein Parallelogramm einbauen, um die Rekursion sichtbar zu machen.



$$a_9 = 2\sin(22.5°)a_8 + a_7$$

Abb. 6: Rekursion

Bemerkung: Bei der Quotientenfolge $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ vermuten wir einen Limes. Dieser ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2 = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{8}\right)x + 1$$

Die Lösungen sind:

$$x_1 = \sin\left(\tfrac{\pi}{8}\right) + \sqrt{\sin^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right) + 1} \approx 1.453405903$$
$$x_2 = \sin\left(\tfrac{\pi}{8}\right) - \sqrt{\sin^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right) + 1} \approx -0.6880390386$$

Herleitung gemäß allgemeinen Techniken bei der verallgemeinerten Fibonacci-Folge (Walser 2013, S. 113f).

2.3 Der Sonderfall

Für $k = 6$ erhalten wir wegen $2\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = 1$ die Fibonacci-Rekursion und entsprechend die Fibonacci-Folge. Zur Visualisierung dazu siehe (Plaza and Walser 2013).

2.4 Bildergalerie

Einige Beispiele.

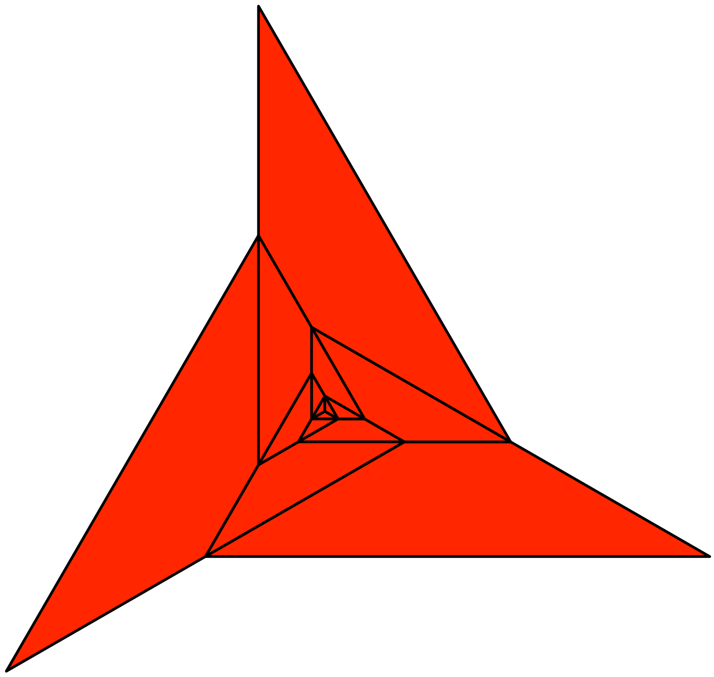


Abb. 7: Drei Spitzen

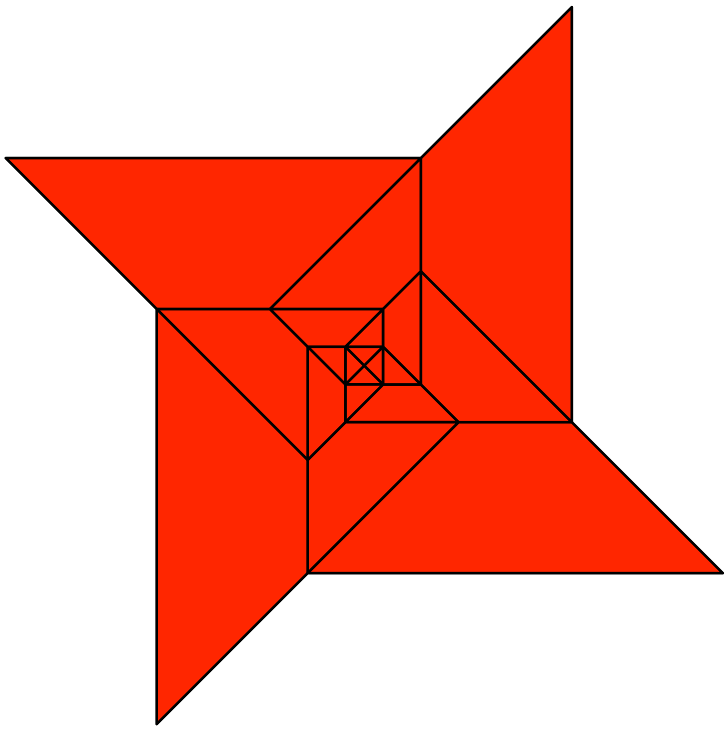


Abb. 8: Vier Spitzen

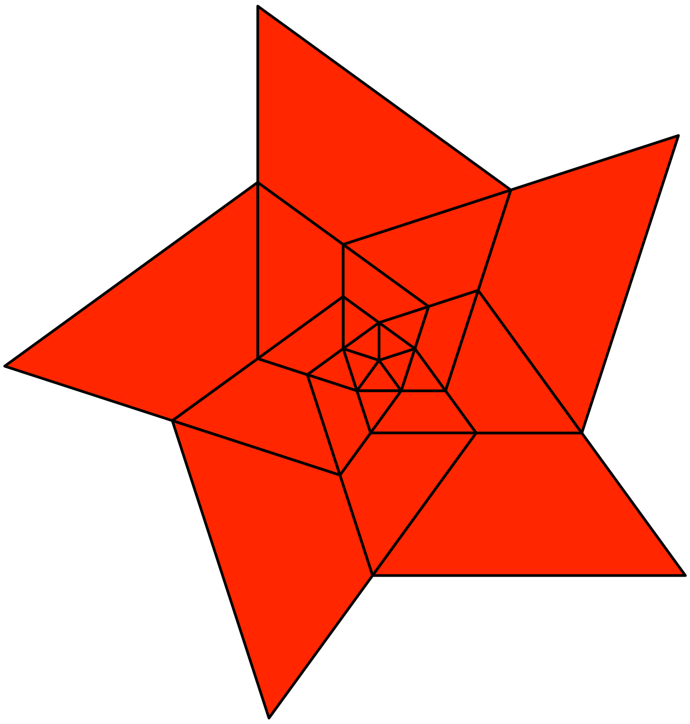


Abb. 9: Fünf Spitzen

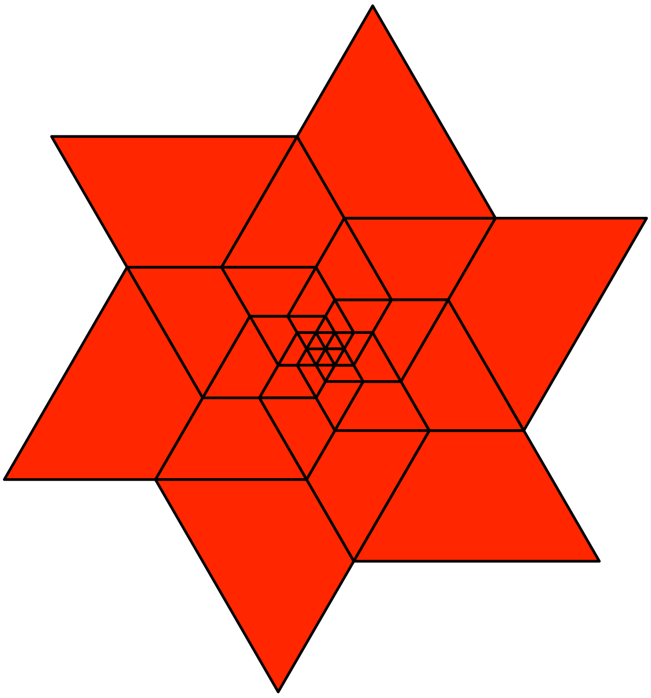


Abb. 10: Sechs Spitzen, Fibonacci-Stern

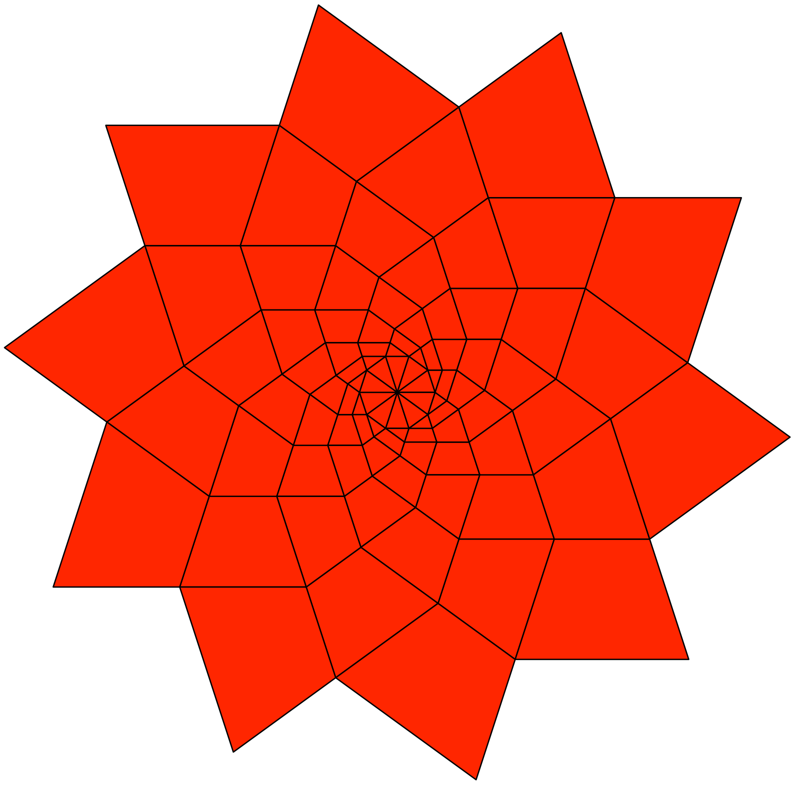


Abb. 11: Zehn Spitzen

Bei den bisherigen Beispielen war im Zentrum ein regelmäßiges k-Eck zu erkennen. Das ändert sich bei den folgenden Überlegungen.

3 Verallgemeinerung des Goldenen Sterns

3.1 Beispiel

Wiederum exemplarisch das Vorgehen für einen Stern mit $k = 8$ Spitzen.

Die Schlüsselzahl ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2 = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{8}\right)x + 1$$

Also:

$$x_1 = \sin\left(\tfrac{\pi}{8}\right) + \sqrt{\sin^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right) + 1} \approx 1.453405903$$

Wir zeichnen nun ein gleichschenkliges Mustertrapez mit der Deckseite 1, der Schenkellänge $x_1 \approx 1.453405903$ und dem Basiswinkel 67.5° (Abb. 12).

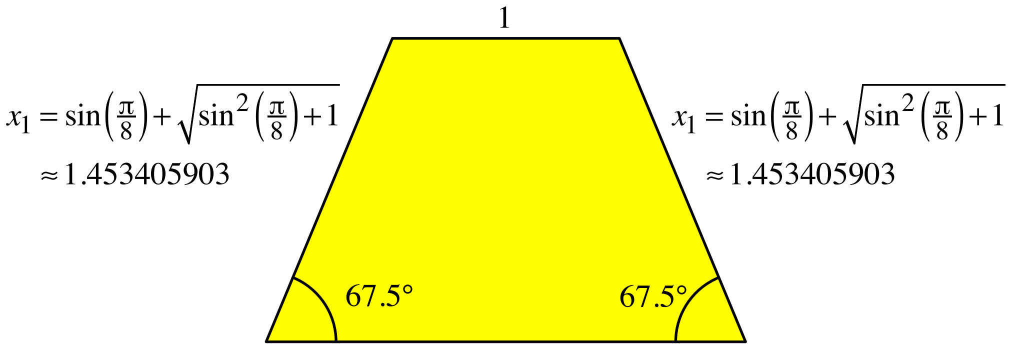
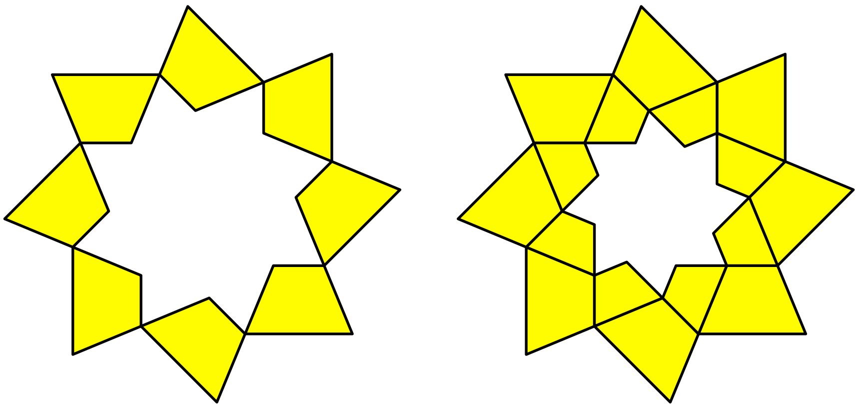


Abb. 12: Mustertrapez

Nun formen wir aus acht Trapezen einen Ring gemäß Abbildung 13a.



a) b)

Abb. 13: Ring und Doppelring

Zu diesem Ring erstellen wir eine spiegelbildliche Kopie, drehen sie um 22.5° und reduzieren sie mit dem Kehrwert von x_1. Dann passt die Kopie genau in den Ring der Abbildung 13a. Wir erhalten den Doppelring der Abbildung 13b.

Diesen Doppelring können wir nun kopieren und mit Faktoren $\left(x_1^2\right)^p$, $p \in \mathbb{Z}$, strecken und einpassen. So entsteht ein Stern (Abb. 14).

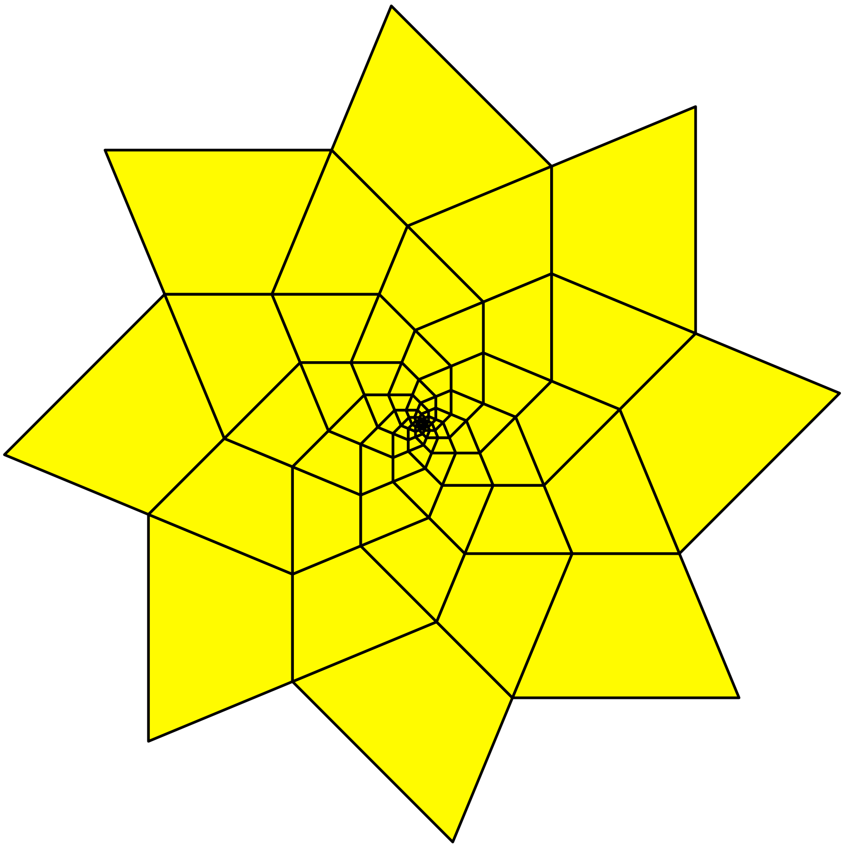


Abb. 14: Stern mit acht Spitzen

Im Unterschied zum Stern der Abbildung 4 erkennen wir im Zentrum kein regelmäßiges Achteck. Vielmehr haben wir im Zentrum einen Häufungspunkt. Die Trapeze sind alle zueinander ähnlich. Wir haben das Verhalten einer geometrischen Folge.

Der Stern ist eine Verallgemeinerung des Goldenen Sterns.

Wir erkennen im Stern eckige logarithmische Spiralen (Abb. 15).

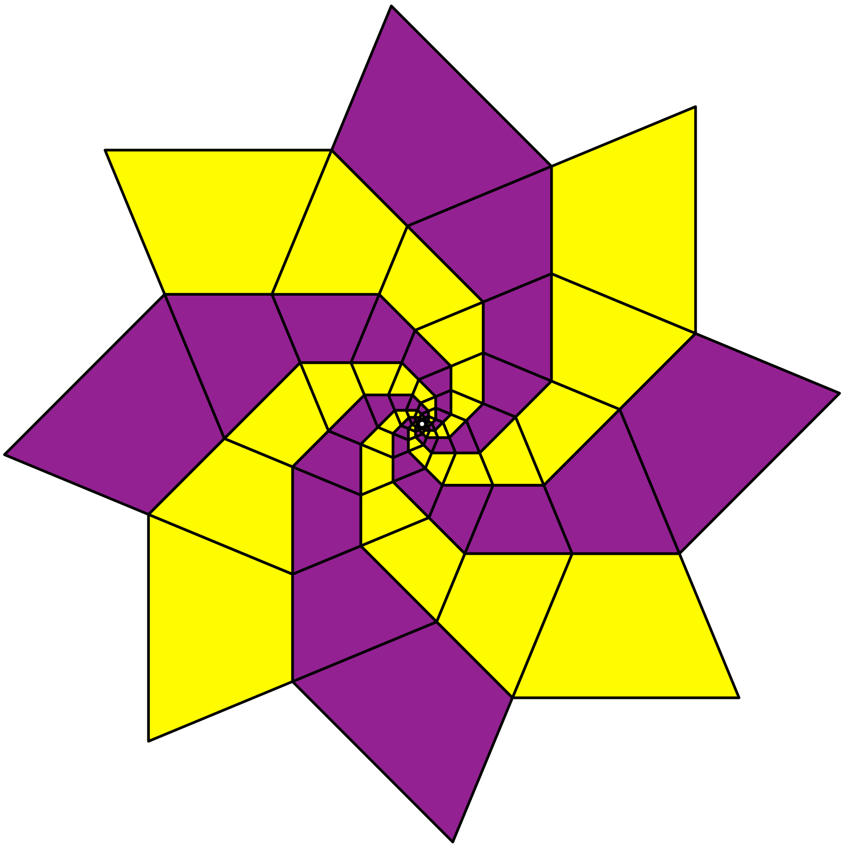


Abb. 15: Eckige logarithmische Spiralen

3.2 Hintergrund

Die Trapeze in der Abbildung 4 haben zwar gleiche Winkel, nicht aber gleiche Seitenverhältnisse. Allerdings haben die Seitenverhältnisse einen Grenzwert. „Janz weit außen“ nähern sich die Trapeze formmäßig einem Grenztrapez an. Für die Verallgemeinerung des Goldenen Sterns beginnen wir gleich mit diesem Grenztrapez und ergänzen zum Stern.

3.3 Beispiele

Für die Beispiele mit verschiedenen Spitzenzahlen *k* verschaffen wir und zunächst einen Überblick über die Grenzwerte der Seitenverhältnisse (Tab. 2).

k	Grenzwert	Grenzwert	Kehrwert
1	1	1	1
2	$1+\sqrt{2}$	2.414213562	0.4142135624
3	$\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{7}$	2.188901060	0.4568502516
4	$\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$	1.931851653	0.5176380901
5	$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+1}$	1.747738485	0.5721679808
6	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$	1.618033988	0.6180339890
7	$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+1}$	1.523954883	0.6561874050
8	$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+1}$	1.453405903	0.6880390385
9	$\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)+\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right)+1}$	1.398891837	0.7148515515
10	$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+1}$	1.355674294	0.7376403052

Tab. 2: Grenzwerte

Die Zahlen $k = 1$ und $k = 2$ sind für unseren geometrischen Kontext irrelevant.

Für $k = 6$ erhalten wir den Goldenen Schnitt. Das ist insofern bemerkenswert, als wir üblicherweise den Goldenen Schnitt im Zusammenhang mit der Zahl 5 antreffen.

Und nun einige Beispiele.

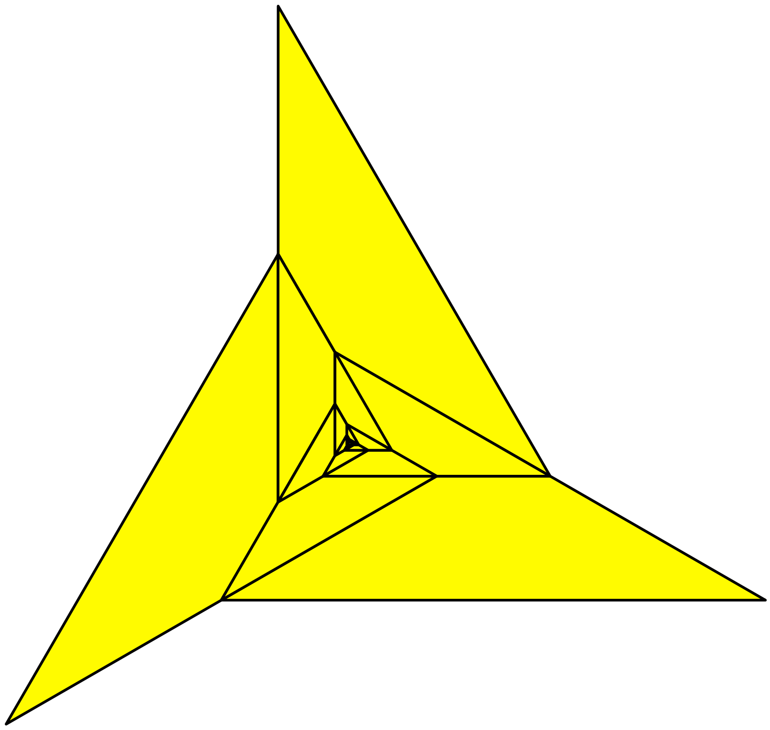


Abb. 16: Drei Spitzen

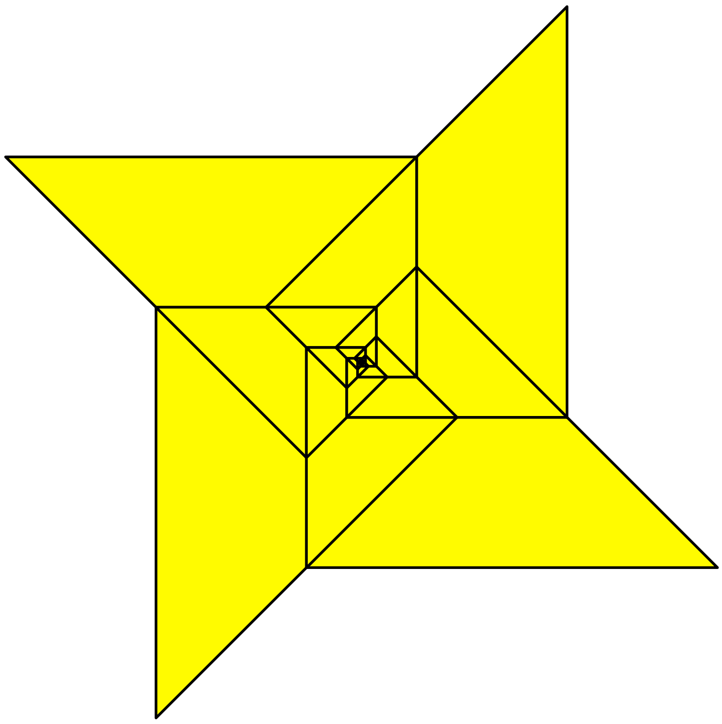


Abb. 17: Vier Spitzen

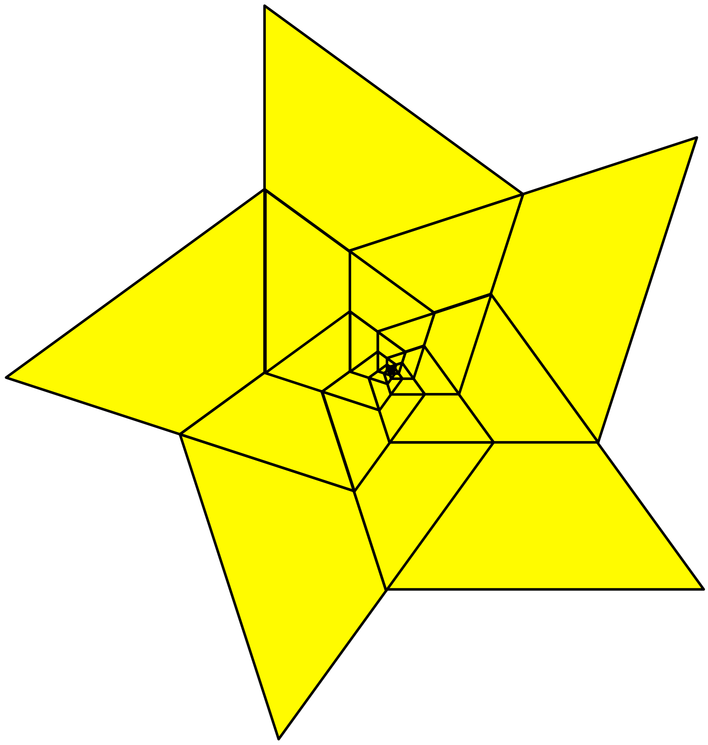


Abb. 18: Fünf Spitzen

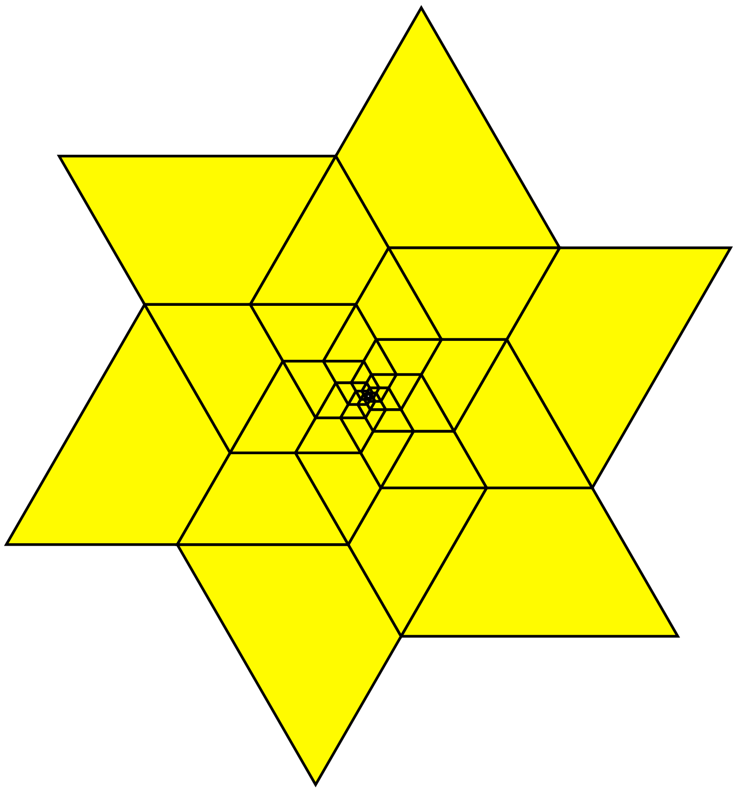


Abb. 19: Sechs Spitzen. Goldener Stern

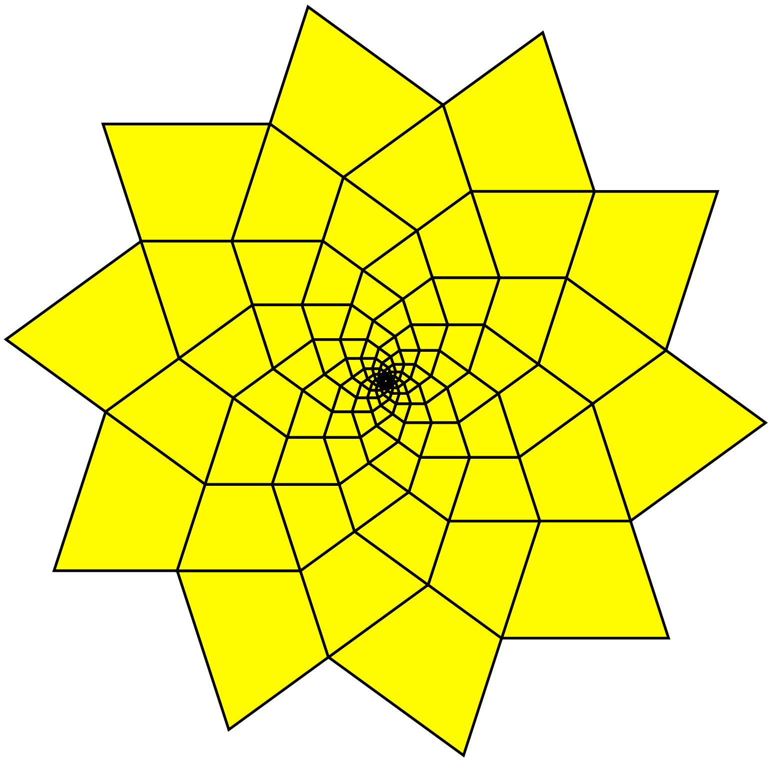


Abb. 20: Zehn Spitzen

Literatur

Plaza, Angel and Walser, Hans (2013): Proof Without Words: Fibonacci Triangles and Trapezoids. Mathematics Magazine. 86 (2013) p. 55.

Walser, Hans (2012): Fibonacci. Zahlen und Figuren. Leipzig, EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-60-8.

Walser, Hans (6. Auflage). (2013). Der Goldene Schnitt. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.