Hans Walser, [20181103], [20181216]

Stetige Teilung

1 Worum geht es?

Die Euklidische Definition der stetigen Teilung wird verallgemeinert.

2 Euklid

Eine Strecke heißt *stetig geteilt* (Walser 2013, S. 13), wenn für die Teilstrecken a_1 und a_2 mit $a_1 < a_2$ gilt:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + a_2}{a_2} \tag{1}$$

Die Abbildung 1 illustriert den Sachverhalt.

Abb. 1: Stetige Teilung

Man spricht in dieser Situation auch von der Teilung im *Goldenen Schnitt*.

3 Drei Teile

Wir arbeiten mit drei Teilstücken a_1, a_2 und a_3 mit $a_1 < a_2 < a_3$, und es soll gelten:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_2 + a_3}{a_2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \tag{2}$$

Die Abbildung 2 illustriert den Sachverhalt.

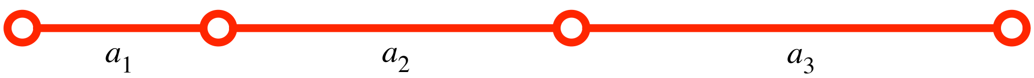

Abb.3: Drei Teile

4 Allgemeint mit *n* Teilen

Wir arbeiten mit n Teilstücken $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, und es soll gelten:

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_{n-1}+a_n}{a_2} = \frac{a_{n-2}+a_{n-1}+a_n}{a_3} = \cdots = \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_n} \qquad (3)$$

Die Abbildung 3 illustriert den Sachverhalt für $n = 2, 3, \ldots, 10$.

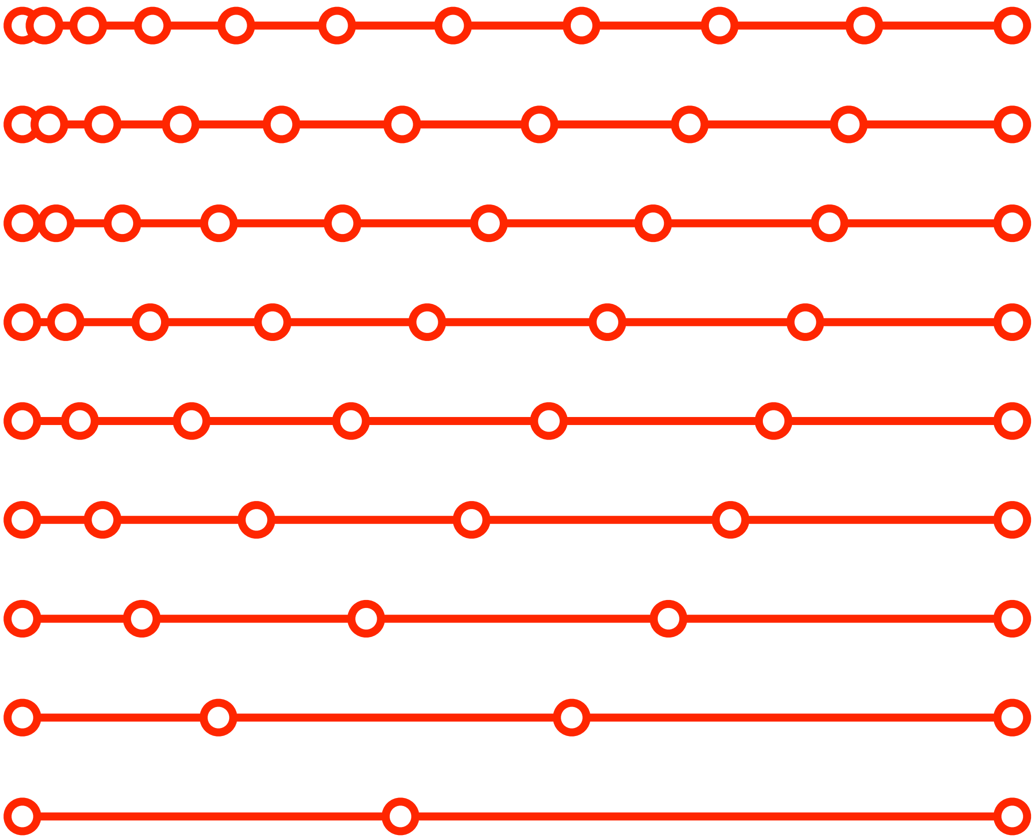

Abb. 3: Stetige Teilungen

Die Abbildung 4 zeigt dasselbe mit Balkendiagrammen.

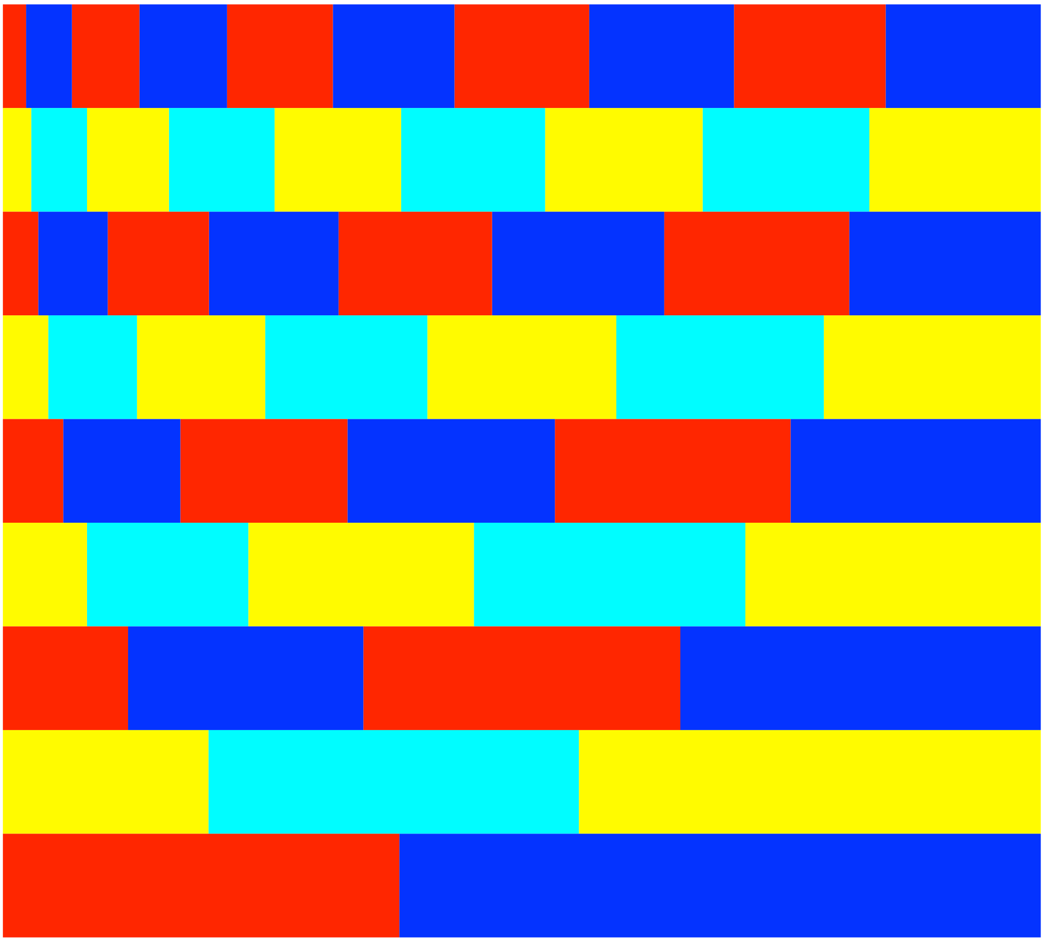

Abb. 4: Stetige Teilungen

5 Numerisches

Die Gleichung (3) beinhaltet nur $n-1$ Gleichungen für die n Unbekannten $a_1,\ldots,a_n$. Wir führen als weitere Gleichung die Normierung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \tag{4}$$

ein.

Das aus (3) und (4) bestehende Gleichungssystem ist nicht linear. Dies macht das Auflösen schwierig.

5.1 Zwei Teile

Für $n = 2$ erhalten wir die Werte der Tabelle 1.

i	a_i
1	0.3819660113
2	0.6180339887

Tab. 1: Zwei Teile

Wir erhalten die Werte des Goldenen Schnittes.

5.2 Drei Teile

Für $n = 3$ erhalten wir die Werte der Tabelle 2.

i	a_i
1	0.198062264195162
2	0.356895867892213
3	0.445041867912626

Tab. 2: Drei Teile

Die drei Teile bilden *keine* geometrische Folge.

5.3 Vier Teile

Für $n = 4$ erhalten wir die Werte der Tabelle 3.

i	a_i
1	0.120614758428183
2	0.226681596905677
3	0.305407289332278
4	0.347296355333860

Tab. 3: Vier Teile

5.4 Fünf Teile

Für $n = 5$ erhalten wir die Werte der Tabelle 4.

i	a_i
1	0.08101405277100522
2	0.15546482879562723
3	0.21732076897616492
4	0.2615706729106323
5	0.2846296765465703

Tab. 4: Fünf Teile

6 Link mit Trigonometrie

Wir führen für $i = 1, ..., n$ und $m = 2n + 1$ drei neue Folgen ein:

$$b_i = 2\tan\left(\tfrac{\pi}{2m}\right)\sin\left(i\tfrac{\pi}{m}\right) \tag{5}$$

$$c_i = 2\tan\left(\tfrac{\pi}{2m}\right)\sin\left(i\tfrac{2\pi}{m}\right) \tag{6}$$

$$d_i = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2m}\right)}\left(\cos\left(\tfrac{2i-1}{2m}\pi\right) - \cos\left(\tfrac{2i+1}{2m}\pi\right)\right) \tag{7}$$

Die Tabelle 5 zeigt die Werte für $n = 5$.

i	b_i	c_i	d_i
1	0.08101405280	0.1554648288	0.08101405288
2	0.1554648288	0.2615706730	0.1554648289
3	0.2173207690	0.2846296766	0.2173207692
4	0.2615706730	0.2173207690	0.2615706732
5	0.2846296766	0.08101405280	0.2846296763

Tab. 5: Zwei neue Folgen

Wir vermuten, dass die Folgen b_i und d_i untereinander und mit der Folge a_i übereinstimmen. Die Folge c_i hat dieselben Werte wie die anderen Folgen, aber sie sind anders angeordnet. Die größte Zahl ist in der Mitte.

Die Gleichwertigkeit der drei Folgen b_i, c_i, d_i kann mit trigonometrischen Mitteln bewiesen werden. Siehe dazu [1].

Für die Übereinstimmung mit der Folge a_i muss gezeigt werden, dass die Bedingungen (3) und (4) erfüllt sind. Dazu habe ich CAS verwendet. Ein formaler Beweis ist mir nicht gelungen.

7 Link mit Geometrie

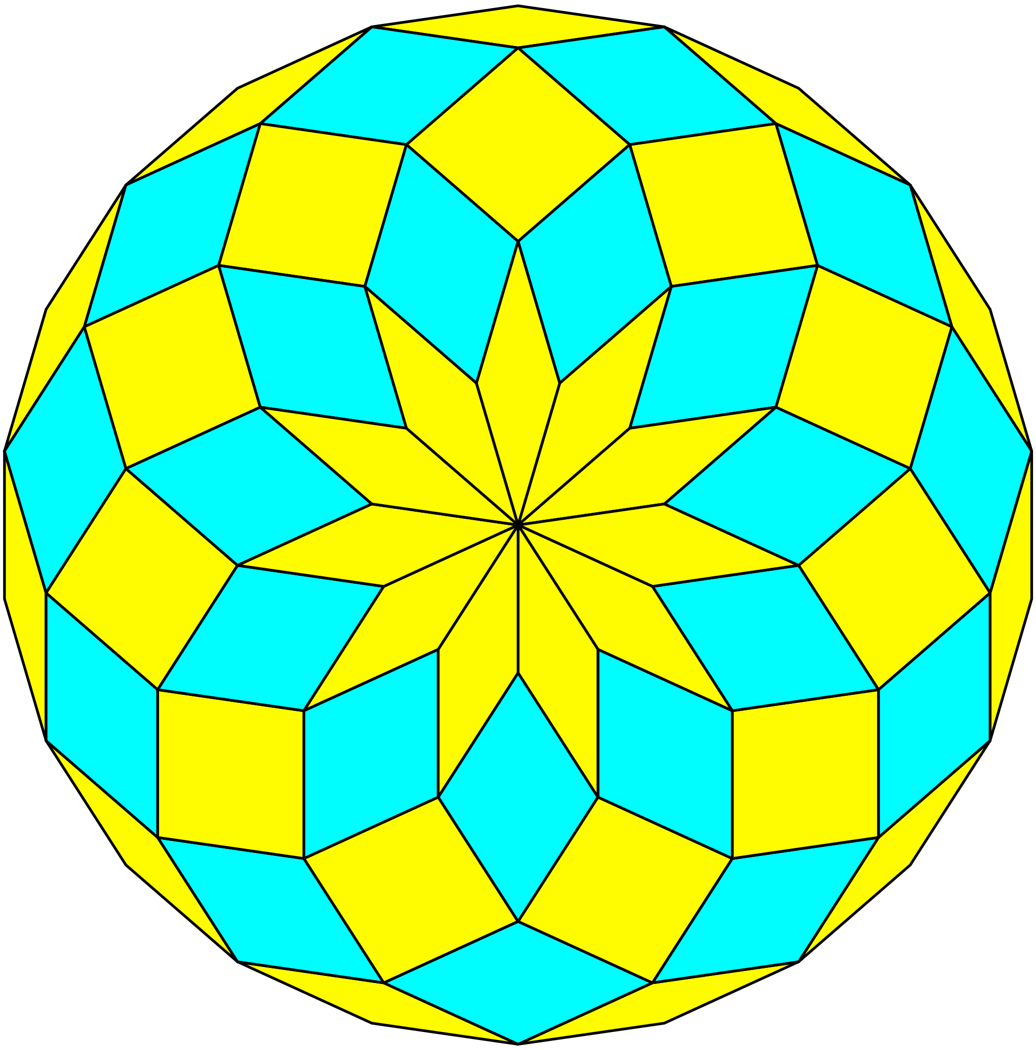

Abb. 5: Rhombenrosette

Die Rhombenrosette der Abbildung 5 besteht aus $n = 5$ Ringen mit je $m = 2n + 1 = 11$ Rhomben. Die dem Zentrum zugewandten Rhombenwinkel sind der Reihe nach:

$$\frac{2}{11}\pi, \frac{4}{11}\pi, \frac{6}{11}\pi, \frac{8}{11}\pi, \frac{10}{11}\pi \tag{8}$$

Also:

$$i\frac{2\pi}{m}, \quad i = 1,\ldots,n \tag{9}$$

Für die Flächeninhalte der Rhomben im i-ten Ring erhalten wir daraus:

$$s^2 \sin\left(i\frac{2\pi}{m}\right), \quad i = 1,\ldots,n \tag{10}$$

Dabei ist s die Seitenlänge der Rhomben. Wir sehen, dass die Flächenverhältnisse der Folge c_i entsprechen. Der Flächenanteil des äußersten Ringes mit den kleinsten Rhomben ist etwa 8.1%, der Flächenanteil des mittleren Ringes mit den größten Rhomben ist etwa 28.5%.

Die Flächenverhältnisse entsprechen der verallgemeinerten stetigen Teilung.

Literatur

Walser, H. (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.

Weblinks

[1] Hans Walser: Trigonometrische Identität
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/T/Trigo_Id/Trigo_Id.htm