Hans Walser, [20210610]

Stetige Teilung

1 Der Goldene Schnitt

Wir arbeiten mit der positiven Lösung der Gleichung:

$$x^2 + x = 1 \tag{1}$$

Die positive Lösung ist:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618 \tag{2}$$

Es handelt sich hier um den *Goldenen Schnitt* (Walser 2013).

Die Abbildung 1 zeigt eine Illustration mit Kreisen.

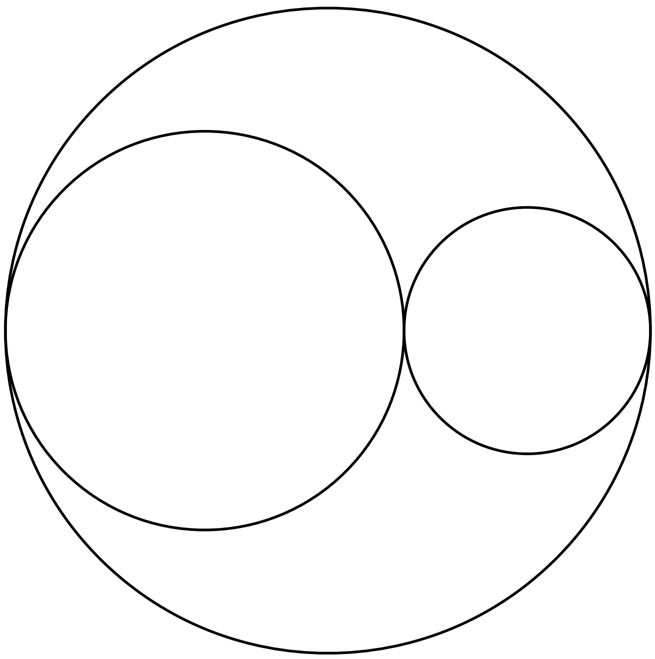

Abb. 1: Radien im Goldenen Schnitt

Der große Außenkreis hat den Radius 1. Der mittlere Kreis hat den Radius x und der kleine den Radius x^2.

Euklid verwendete für den Goldenen Schnitt die Formulierung *Stetige Teilung*. Das Teilverhältnis von mittel zu groß ist dasselbe wie von klein zu mittel. Wichtig ist dabei, dass die Summe der Radien des mittleren und des kleinen Kreises den Radius des großen Kreises ergeben.

2 Kubische Situation

Die kubische Gleichung

$$x^3 + x^2 + x = 1 \tag{3}$$

hat die positive Lösung:

$$x = \frac{\left(17+3\sqrt{33}\right)^{\frac{1}{3}}}{3} - \frac{2}{3\left(17+3\sqrt{33}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3} \approx 0.544 \tag{4}$$

Entsprechend erhalten wir eine Kreisdarstellung (Abb. 2).

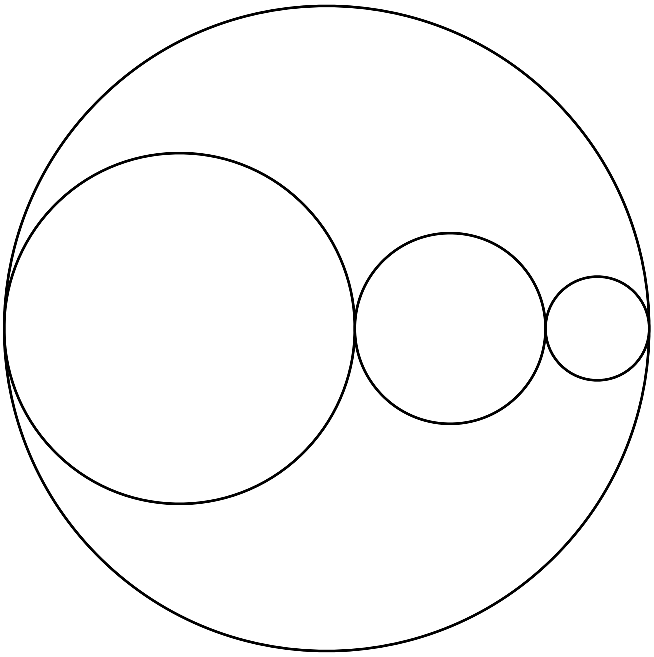

Abb. 2: Kubische Situation

3 Weitere Beispiele

Die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = 1 \tag{5}$$

haben die positiven numerischen Lösungen der Tabelle 1.

n	x
1	1
2	0.6180339880
3	0.5436890125
4	0.5187900637
5	0.5086603916
6	0.5041382584
7	0.5020170552
8	0.5009941779
9	0.5004931183
10	0.5002454623

Tab. 1: Positive Lösungen

Die Lösungen streben für wachsendes n gegen 0.5. Das ist auch klar, weil:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = 1 \tag{6}$$

Die Abbildung 3.1 zeigt für $n = 1, \ldots , 10$ die Grafen von:

$$y = 1 - \sum_{k=1}^{n} x^k \tag{7}$$

Die positiven reellen Nullstellen sind die Lösungen der Tabelle 1. Sie streben gegen 0.5.

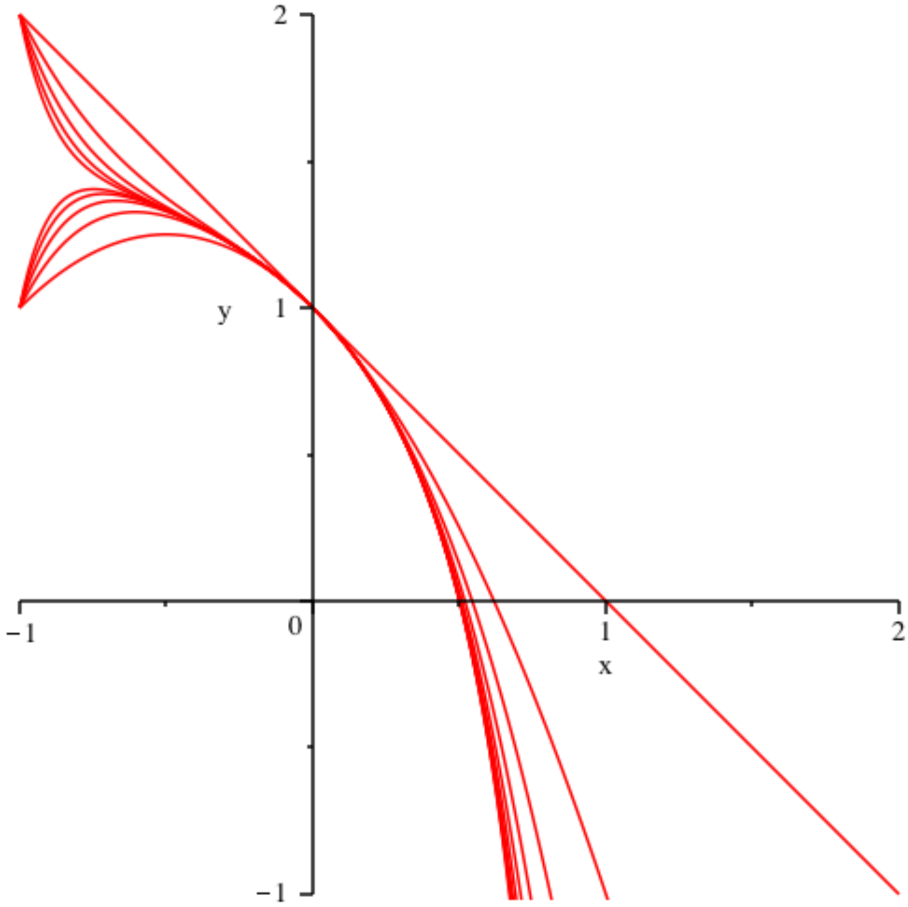

Abb. 3: Nullstellen

Die Abbildung 3.2 zeigt die Funktionsgrafen für $n = 1, \ldots , 100$. Für ungerade n haben wir keine weitere reelle Nullstelle. Für gerade n gibt es noch eine negative Nullstelle. Diese Nullstellen streben gegen –1.

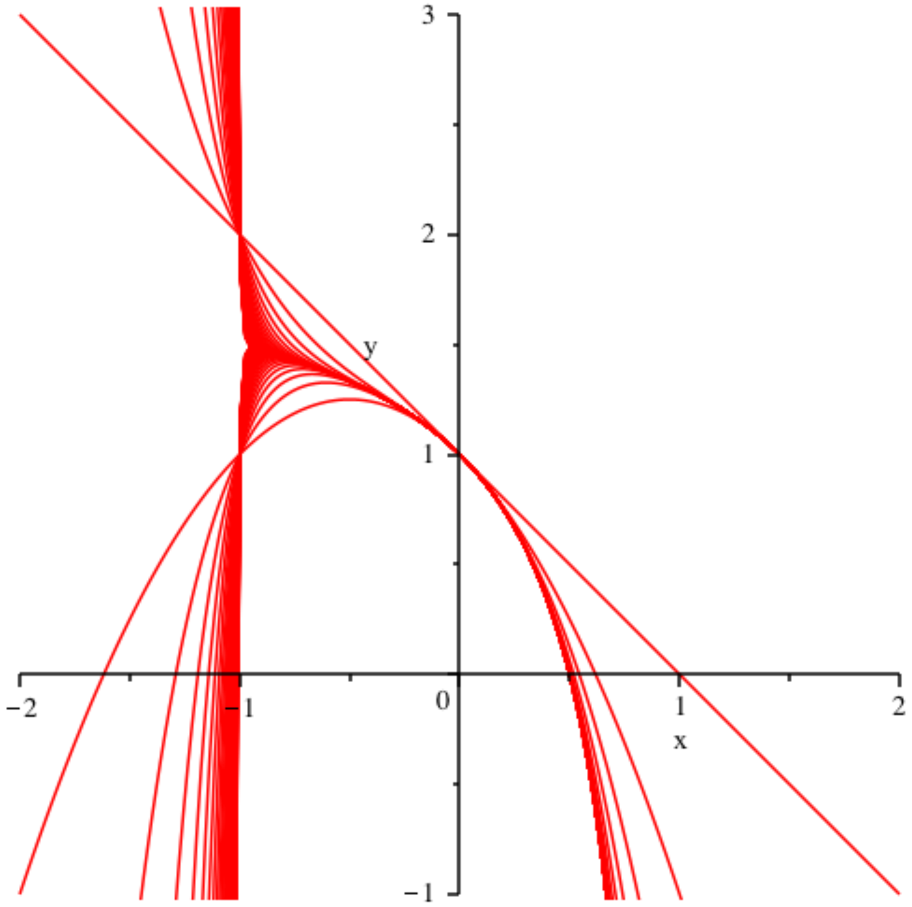

Abb. 3.2: Weitere Grafen

Die Abbildung 4 zeigt die Kreis-Situation für $n = 4, \ldots , 10$.

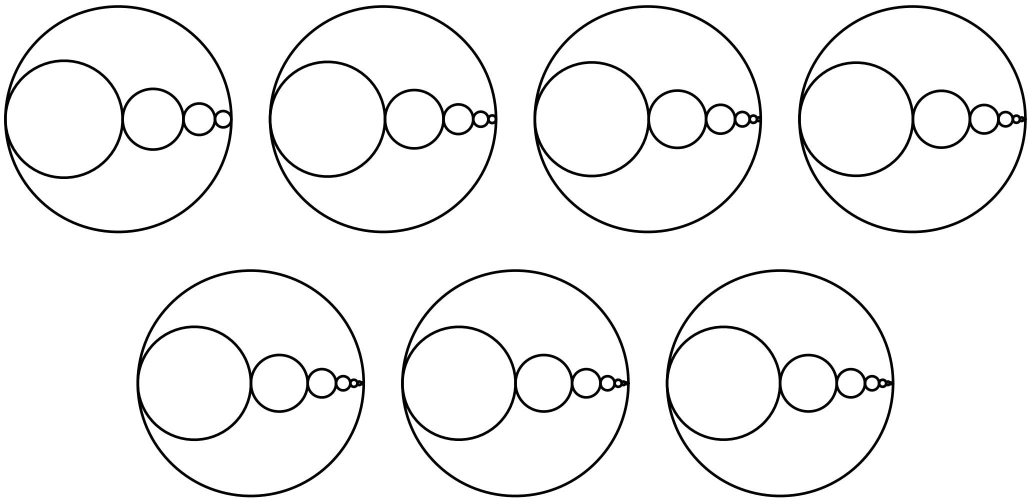

Abb. 4: Kreise

4 Weitere Beispiele im Goldenen Schnitt

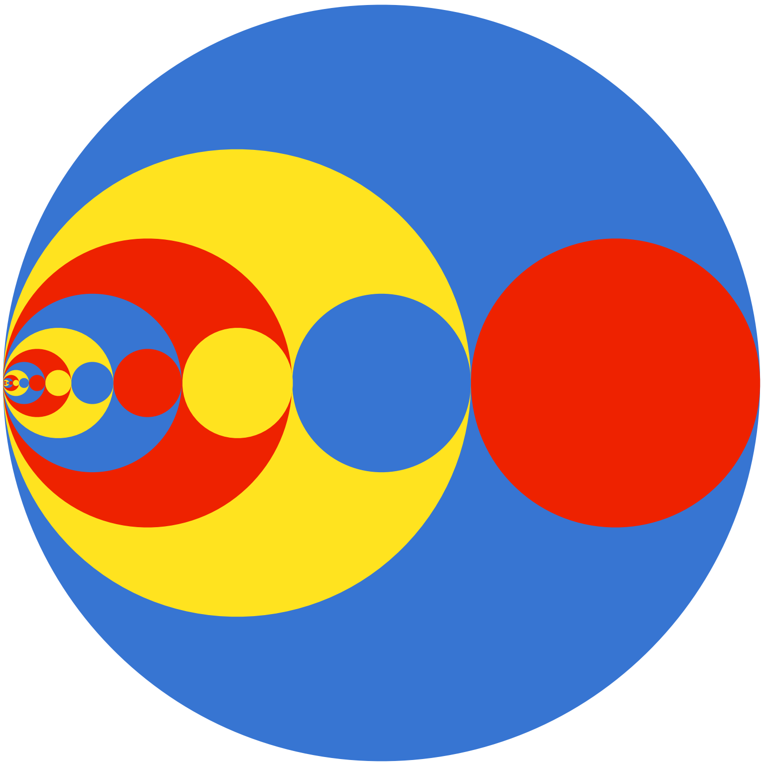

Abb. 5: Zusätzliche Kreise

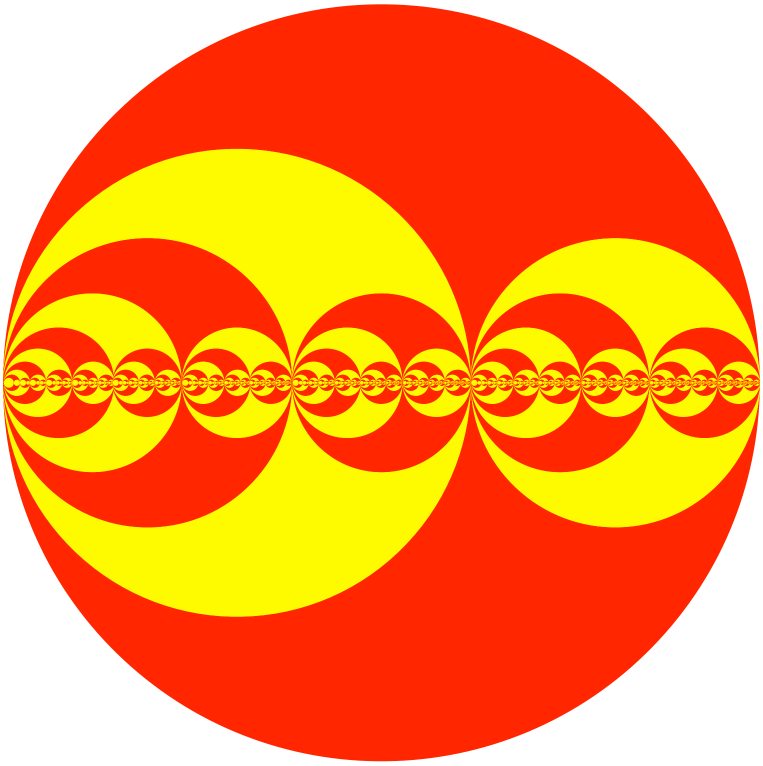

Abb. 6.1: Fraktal

Für die Anzahlen der Kreise erhalten wir geordnet nach Radien und Farben (die Abbildung 6.1a gibt eine Zählhilfe):

Radius	Kreise total	Rote Kreise	Gelbe Kreise
x^0	1	1	0
x^1	1	0	1
x^2	2	1	1
x^3	3	2	1
x^4	5	2	3
x^5	8	4	4
x^6	13	7	6
x^7	21	10	11

Tab. 2: Abzählen der Kreise

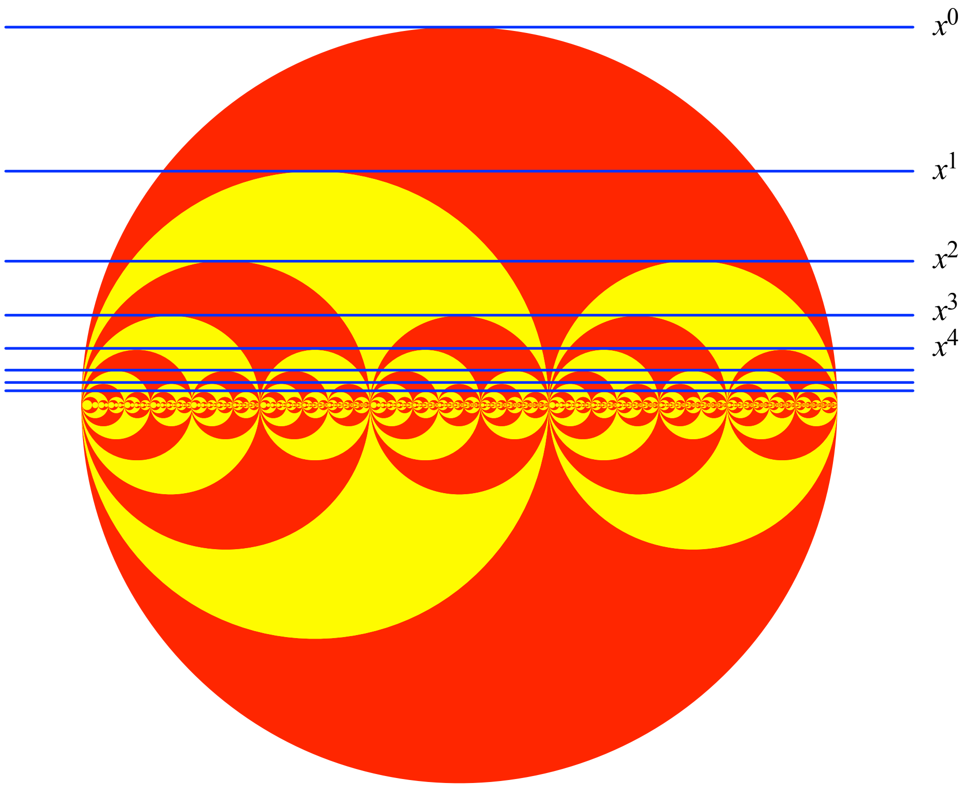

Abb. 6.1a: Zählhilfe

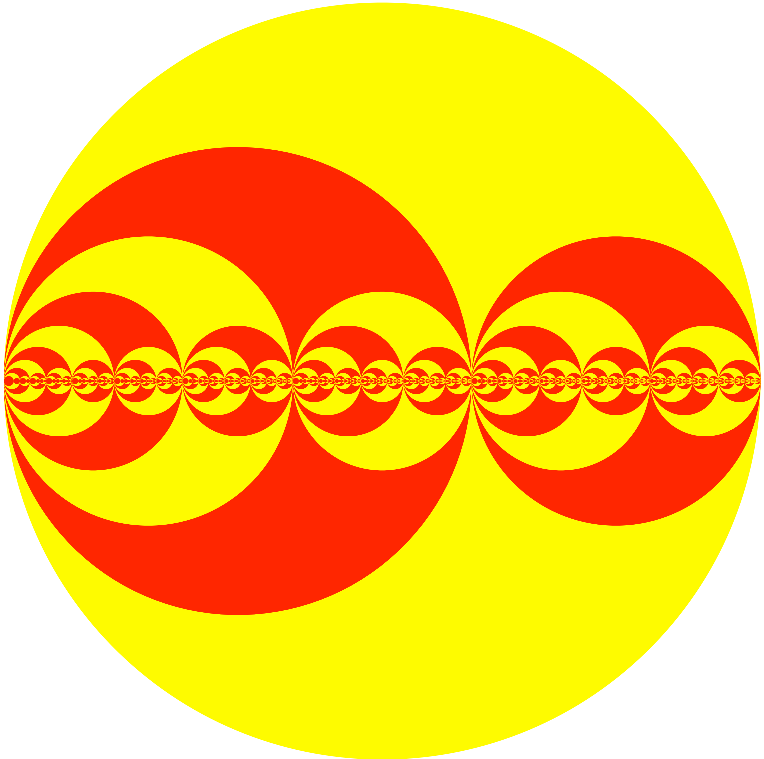

Abb. 6.2: Farbduales Fraktal

Literatur

Walser, H. (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.

Websites

Hans Walser: Miniaturen. Goldener Schnitt
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen_Uebersicht/Goldener_Schnitt/index.html

Hans Walser: Stetige Teilung
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Stetige_Teilung/Stetige_Teilung.htm