Hans Walser, [20180915]

Stumpf

1 Worum geht es?

Inhaltsformeln von „Stümpfen".

2 In der Ebene: Trapez als Dreieckstumpf

Wir sehen das Trapez als Differenz zweier ähnlicher Dreiecke (Abb. 1).

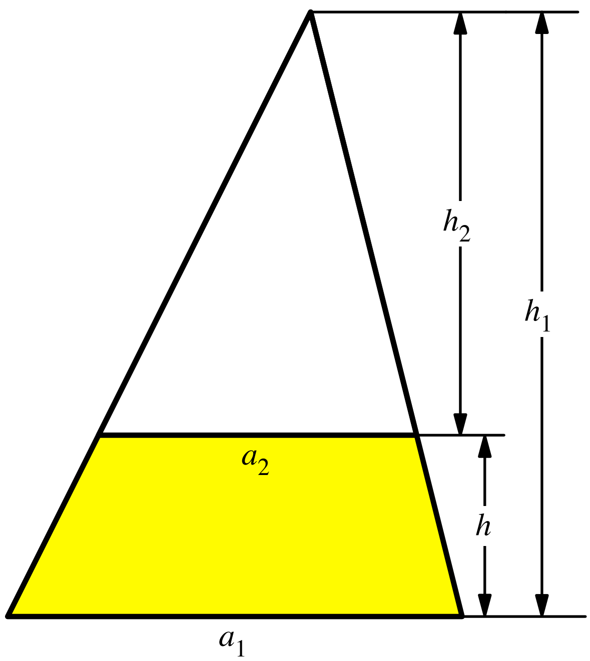

Abb. 1: Trapez

2.1 Erster Rechenweg

Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke ist:

$$\frac{h_1}{a_1} = \frac{h_2}{a_2} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 h_2 = a_2 h_1 \quad \Leftrightarrow \quad -a_1 h_2 + a_2 h_1 = 0 \tag{1}$$

Für die Trapezfläche A_{Trapez} erhalten wir:

$$A_{\text{Trapez}} = \tfrac{1}{2}\left(a_1 h_1 - a_2 h_2\right) \tag{2}$$

Wegen (1) können wir eine rote Null hineinflicken:

$$\begin{aligned} A_{\text{Trapez}} &= \tfrac{1}{2}\left(a_1h_1 - a_2h_2\right) = \tfrac{1}{2}\left(a_1h_1 - a_1h_2 + a_2h_1 - a_2h_2\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(a_1\left(h_1 - h_2\right) + a_2\left(h_1 - h_2\right)\right) = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(a_1 + a_2\right)}_{\text{Mittellinie}}\underbrace{\left(h_1 - h_2\right)}_{\text{Höhe}} \end{aligned} \tag{3}$$

Wir erhalten die von der Schule her bekannte Formel.

2.2 Zweiter Rechenweg

Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke ist:

$$\frac{h_1}{a_1} = \frac{h_2}{a_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_1}{a_1} = \frac{h_1 - h_2}{a_1 - a_2} = \frac{h_2}{a_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_1}{a_1} = \frac{h}{a_1 - a_2} = \frac{h_2}{a_2} \tag{4}$$

Daraus folgt:

$$h_1 = \frac{ha_1}{a_1 - a_2} \quad \text{und} \quad h_2 = \frac{ha_2}{a_1 - a_2} \tag{5}$$

In (2) eingesetzt liefert mit Hilfe der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned} A_{\text{Trapez}} &= \tfrac{1}{2}\left(a_1h_1 - a_2h_2\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{ha_1^2}{a_1 - a_2} - \frac{ha_2^2}{a_1 - a_2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 - a_2}\,h \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\left(a_1 + a_2\right)\left(a_1 - a_2\right)}{a_1 - a_2}\,h = \tfrac{1}{2}\left(a_1 + a_2\right)h \end{aligned} \tag{6}$$

3 Im Raum: Kegel- oder Pyramidenstumpf

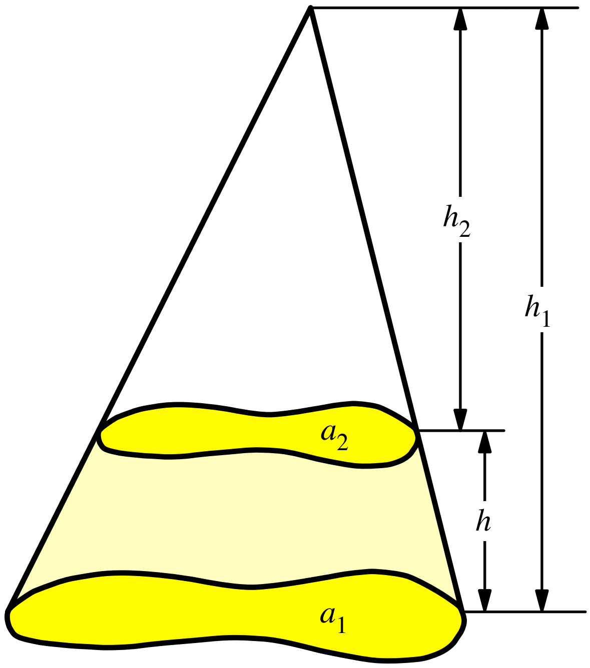

Abb. 2: Kegel- oder Pyramidenstumpf

Mit a_1 und a_2 bezeichnen wir nun die Boden- beziehungsweise die Deckfläche. Es ist:

$$\frac{h_1}{\sqrt{a_1}} = \frac{h_2}{\sqrt{a_2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_1}{\sqrt{a_1}} = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}} = \frac{h_2}{\sqrt{a_2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_1}{\sqrt{a_1}} = \frac{h}{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}} = \frac{h_2}{\sqrt{a_2}} \tag{7}$$

Für das Volumen des Stumpfes erhalten wir:

$$\begin{aligned} V_{\text{Stumpf}} &= \tfrac{1}{3}\left(a_1 h_1 - a_2 h_2\right) = \tfrac{1}{3}\left(a_1 \frac{h\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}} - a_2 \frac{h\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{a_1}^3 - \sqrt{a_2}^3}{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}} h = \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{a_1}^2 + \sqrt{a_1}\sqrt{a_2} + \sqrt{a_2}^2 \right) h = \tfrac{1}{3}\left(a_1 + \sqrt{a_1 a_2} + a_2 \right) h \end{aligned} \tag{8}$$

4 Im 4d-Raum

Wir erhalten analog für den 4d-Inhalt:

$$\begin{aligned}
I_{4\text{d-Stumpf}} &= \tfrac{1}{4}\left(a_1 h_1 - a_2 h_2\right) = \tfrac{1}{4}\left(a_1 \frac{h\sqrt[3]{a_1}}{\sqrt[3]{a_1}-\sqrt[3]{a_2}} - a_2 \frac{h\sqrt[3]{a_2}}{\sqrt[3]{a_1}-\sqrt[3]{a_2}} \right) \\
&= \tfrac{1}{4}\left(\frac{h\sqrt[3]{a_1}^{\,4}}{\sqrt[3]{a_1}-\sqrt[3]{a_2}} - \frac{h\sqrt[3]{a_2}^{\,4}}{\sqrt[3]{a_1}-\sqrt[3]{a_2}} \right) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\sqrt[3]{a_1}^{\,4}-\sqrt[3]{a_2}^{\,4}}{\sqrt[3]{a_1}-\sqrt[3]{a_2}} \right) h \qquad (9) \\
&= \tfrac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{3} \sqrt[3]{a_1}^{\,(3-k)} \sqrt[3]{a_2}^{\,k} \right) h = \tfrac{1}{4}\left(a_1 + \sqrt[3]{a_1^2 a_2} + \sqrt[3]{a_1 a_2^2} + a_2 \right) h
\end{aligned}$$

5 Im *n*d-Raum

Wir erhalten analog für den allgemeinen Fall:

$$I_{n\text{d-Stumpf}} = \tfrac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[(n-1)]{a_1}^{\,(n-1-k)} \sqrt[(n-1)]{a_2}^{\,k} \right) h = \tfrac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_1^{\frac{n-1-k}{n-1}} a_2^{\frac{k}{n-1}} \right) h \qquad (10)$$

6 Mittelbildungen

6.1 Diskret

In unseren Beispielen erhielten wir für a_1 und a_2 die Mittelbildung:

$$\mathrm{Mittel}\left(a_1, a_2\right) = \tfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_1^{\frac{n-1-k}{n-1}} a_2^{\frac{k}{n-1}} \qquad (11)$$

Für $n = 2$ ist dies das arithmetische Mittel.

Die Tabelle 1 zeigt die Mittel für $a_1 = 4$ und $a_2 = 2$ für $n = 2, \ldots, 10$.

n	Mittel(4, 2)
2	3
3	2.942809041
4	2.923661051
5	2.914085403
6	2.908341321
7	2.904512901
8	2.901778922
9	2.899728824
10	2.898134552

Tab. 1: Mittelbeispiele

Die Mittel werden kleiner. Gibt es eine untere Grenze bei wachsendem n?

6.2 Integral

Wir ersetzen die Summanden in (11) durch eine Funktion f wie folgt:

$$f(t) = a_1^{1-t} a_2^t = a_1 \left(\tfrac{a_2}{a_1}\right)^t, \quad t \in [0,1] \tag{12}$$

Die Summe (11) ersetzen wir entsprechend durch ein Integral:

$$m(a_1, a_2) = \int_0^1 a_1 \left(\tfrac{a_2}{a_1}\right)^t \mathrm{d}t = \frac{a_2 - a_1}{\ln(a_2) - \ln(a_1)} \tag{13}$$

Für das Beispiel $a_1 = 4$ und $a_2 = 2$ (vgl. Tab. 1) erhalten wir:

$$m(4,2) \approx 2.885390082 \tag{14}$$