Hans Walser, [20191023]

Summe = Produkt

1 Worum geht es?

Zahlenspielerei. Paritätsproblem. Symmetrie.

2 Problemstellung

Für welche natürlichen Zahlen n hat die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n}(x-k)=\prod_{k=1}^{n}(x-k) \tag{1}$$

(mindestens) eine natürliche Zahl in der Lösungsmenge?

3 Resultat

Es gilt eine Paritätsunterscheidung:

- Für gerades n gibt es *keine* natürlich Zahl in der Lösungsmenge.
- Für ungerades $n = u = 2m - 1$, $n > 3$, gibt es genau eine natürliche Zahl in der Lösungsmenge, nämlich m. Für $n = 3$ gibt es die drei Lösungen 0, 2, 4. Für $n = 1$ ergibt sich eine Identität mit unendlich vielen Lösungen.

Herleitung folgt.

4 Nullstellen

Statt nach den Lösungen der Gleichung (1) können wir auch nach den Nullstellen der Funktion

$$f(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-k)-\sum_{k=1}^{n}(x-k) \tag{2}$$

fragen.

Diese Funktion setzt sich subtraktiv aus den beiden Teilfunktionen

$$p(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-k) \tag{3}$$

und

$$s(x)=\sum_{k=1}^{n}(x-k) \tag{4}$$

zusammen. Wir diskutieren diese beiden Teilfunktionen zunächst einzeln.

4.1 Produktfunktion

Die Produktfunktion (3) hat die ganzzahligen Nullstellen 1, 2, ... , n.

Für gerades n ist der Funktionsgraf achsensymmetrisch (Abb. 1 für $n = 6$) mit der senkrechten Symmetrieachse:

$$x = \frac{n+1}{2} \tag{5}$$

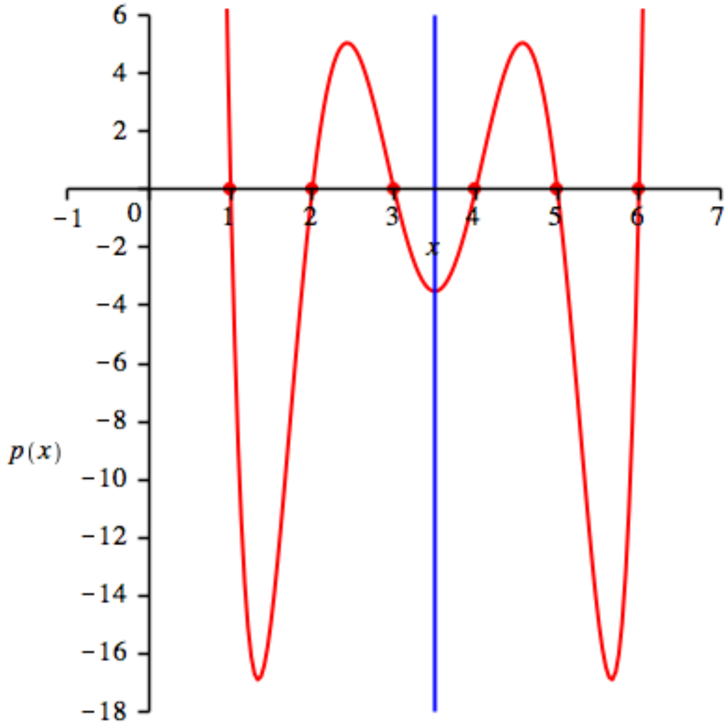

Abb. 1: Achsensymmetrischer Funktionsgraf

Für ungerades n ist der Funktionsgraf punktsymmetrisch mit dem Nullstellenpunkt

$$\left(\frac{n+1}{2}, 0\right) \tag{6}$$

als Symmetriezentrum (Abb. 2 für $n = 7$).

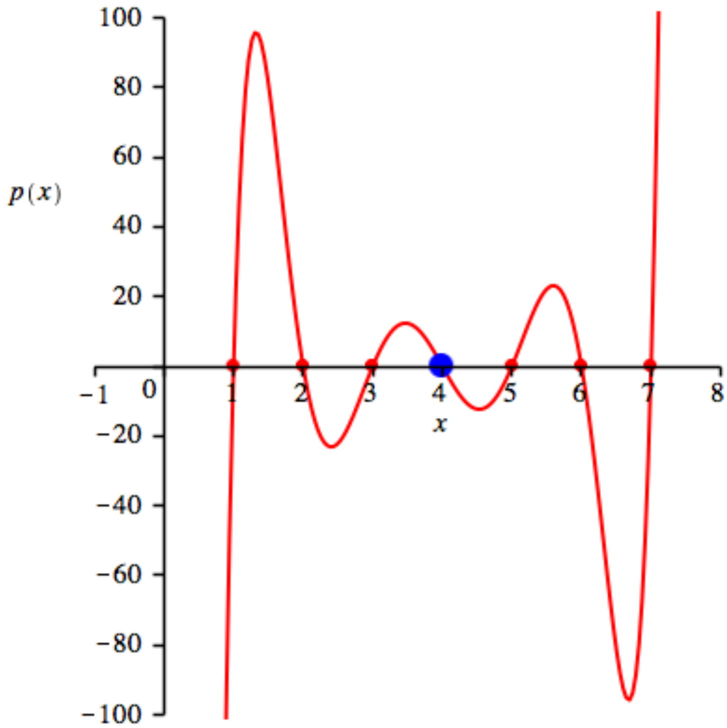

Abb. 2: Punktsymmetrischer Funktionsgraf

Außerhalb des Nullstellbereiches wächst die Produktfunktion sehr stark. So ist bereits:

$$p(0) = (-1)^n n! \quad \text{und} \quad p(n+1) = n! \tag{7}$$

4.2 Summenfunktion

Die Summenfunktion (4) lässt sich umformen:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-k) = nx - \tfrac{1}{2} n(n+1) \tag{8}$$

Es ist also eine lineare Funktion mit der Nullstelle $\frac{n+1}{2}$. Die Summenfunktion wächst sehr langsam. Außerhalb des Nullstellenbereiches kann sie als Störfunktion der Produktfunktion nicht zu Nullstellen führen.

4.3 Differenzfunktion

Für gerades *n* haben die Produktfunktion und die Summenfunktion keine gemeinsamen Nullstellen. Die Summenfunktion „zerstört“ die ganzzahligen Nullstellen der Produktfunktion. Zusätzliche ganzzahlige Nullstellen könnten können allenfalls bei kleinen

Werten von n entstehen. Ich habe das durch explizite Kontrolle für einstellige n ausgeschlossen (sieh Beispiele unten).

Für ungerades $n > 1$ haben Produktfunktion und Summenfunktion die gemeinsame Nullstelle $\frac{n+1}{2}$. Dies ist daher eine Nullstelle der Differenzfunktion. Die Punktsymmetrie bleibt erhalten. Zwei weitere ganzzahlige Nullstellen entstehen bei $n = 3$ (siehe unten). Für weitere kleine ungerade Zahlen habe ich weitere ganzzahlige Nullstellen explizit ausgeschlossen (siehe Beispiele unten).

Damit ist das oben formulierte Resultat nachgewiesen.

5 Beispiele

Für $n = 1$ lautet (1):

$$x-1=x-1 \tag{9}$$

Dies ist eine Identität. Jede Zahl, insbesondere auch jede natürlich Zahl, ist Lösung.

Für $n = 2$ lautet (1):

$$\begin{aligned}(x-1)+(x-2)&=(x-1)(x-2)\\ 2x-3&=x^2-3x+2\\ 0&=x^2-5x+5\end{aligned} \tag{10}$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen:

$$\begin{aligned}x_1&=\tfrac{1}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}\,\tfrac{1}{\Phi}=2-\tfrac{1}{\Phi}\approx 1.382\\ x_2&=\tfrac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}\,\Phi=2+\Phi\approx 3.618\end{aligned} \tag{11}$$

Dabei erscheint der Goldene Schnitt (Walser 2013):

$$\Phi=\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618 \tag{12}$$

Die beiden Lösungen sind irrational.

Die Abbildung 3 zeigt den Grafen der zugehörigen Funktion (2).

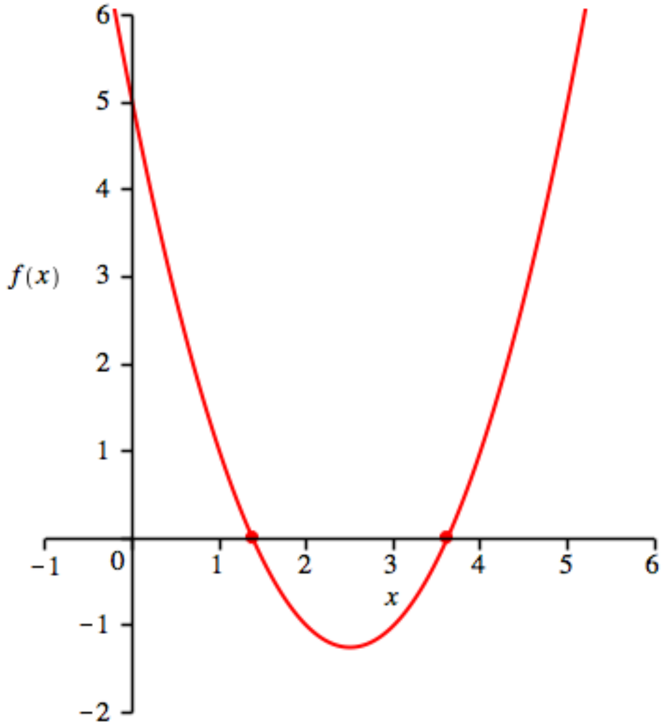

Abb. 3: Zwei irrationale Nullstellen

Für $n = 3$ ergibt sich aus (1) eine kubische Gleichung mit den drei Lösungen:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4 \tag{13}$$

Alle Lösungen sind ganzzahlig.
Die zugehörigen Rechnungen gemäß (1) sind:

$$\begin{gathered}(-1)+(-2)+(-3)=(-1)\times(-2)\times(-3)\\ 1+0+(-1)=1\times 0\times(-1)\\ 3+2+1=3\times 2\times 2\end{gathered} \tag{14}$$

Die Abbildung 4 zeigt den zugehörigen Funktionsgrafen gemäß (2). Er ist punktsymmetrisch.

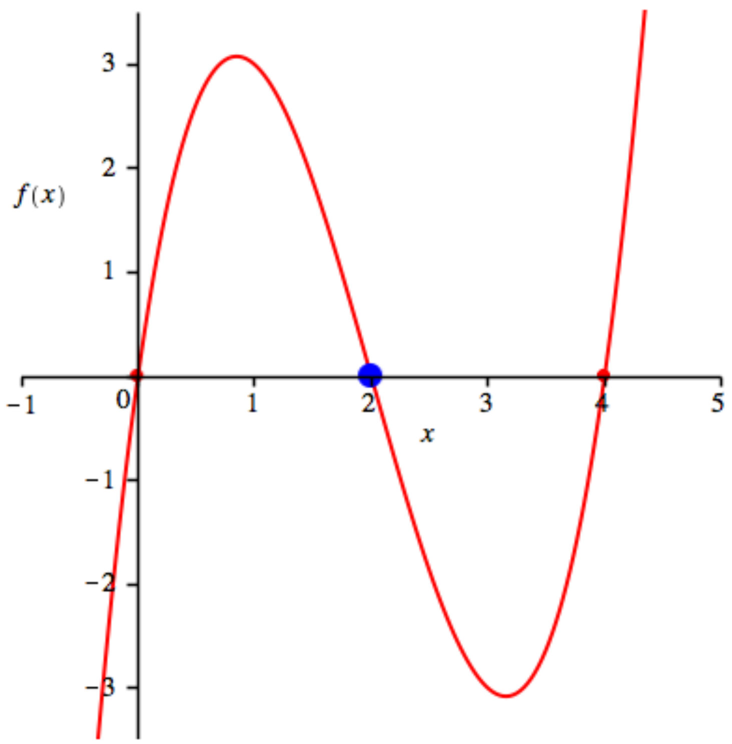

Abb.. 4: Drei ganzzahlige Nullstellen

Für $n = 4$ ergibt sich aus (1) eine Gleichung vierten Grades. Die reellen Lösungen sind:

$$x_1 \approx 2.630, \quad x_2 \approx 4.573 \tag{15}$$

Die Abbildung 5 zeigt den Funktionsgrafen.

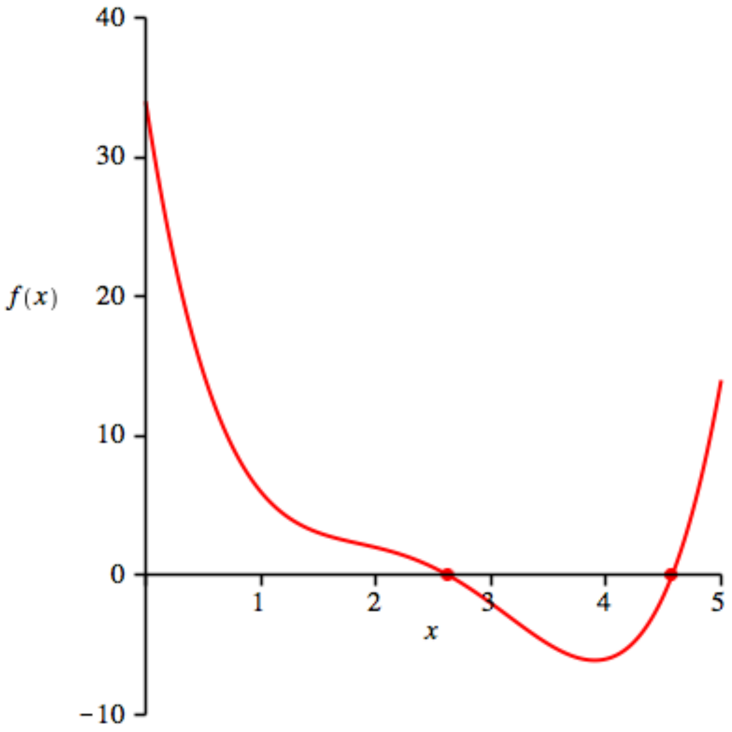

Abb. 5: Zwei nicht ganzzahlige Nullstellen

Für $n = 5$ erhalten wir:

$$x_1 = 3 - \tfrac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{29}}, \quad x_2 = 3 + \tfrac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{29}},$$
$$x_3 = 3 \tag{16}$$
$$x_4 = 3 - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{-10 + 2\sqrt{29}}, \quad x_5 = 3 + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{-10 + 2\sqrt{29}}$$

Wir haben eine ganzzahlige Lösung, nämlich 3. Die zugehörige Rechnung gemäß (1) ist:

$$2 + 1 + 0 + (-1) + (-2) = 2 \times 1 \times 0 \times (-1) \times (-2) \tag{17}$$

Die Lösung ist also trivial und der Symmetrie geschuldet.
Zwei weitere reelle Lösungen sind irrational. Weiter gibt es zwei konjugiert komplexe Lösungen.
Die Abbildung 6 zeigt den Funktionsgrafen. Er ist punktsymmetrisch an der ganzzahligen Nullstelle.

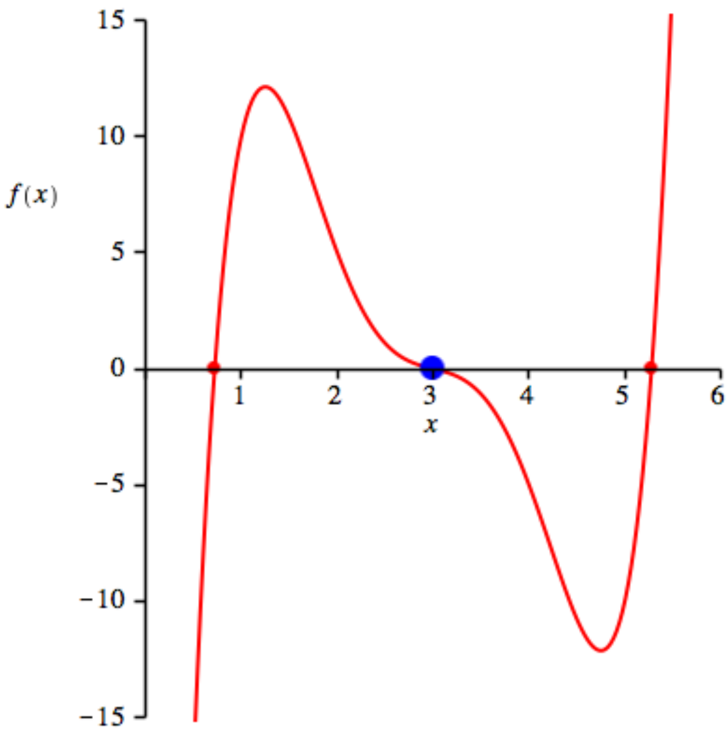

Abb. 6: Eine ganzzahlige und zwei irrationale Nullstellen

Für $n = 6$ erhalten wir vier reelle Nullstellen (Abb. 7). Der Funktionsgraf hat keine Symmetrie.

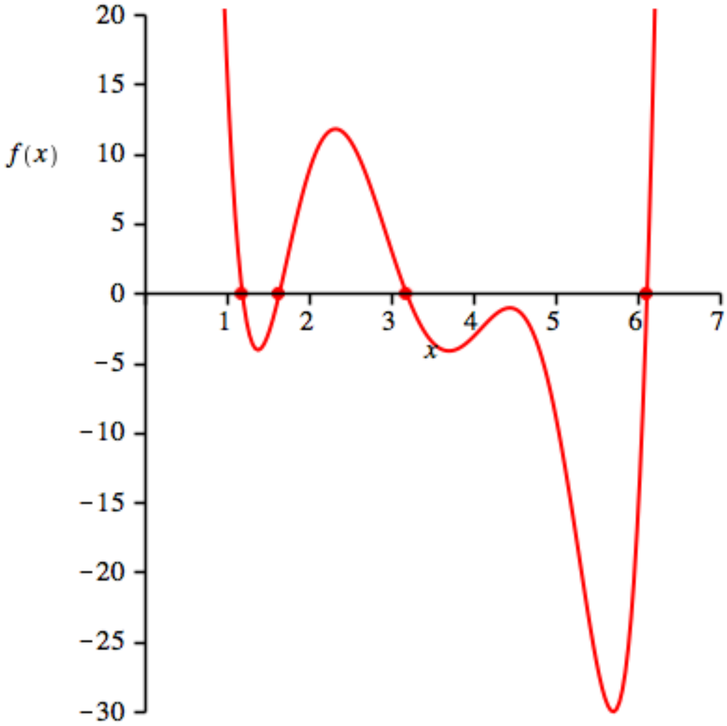

Abb. 7: Vier reelle Nullstellen bei $n = 6$.

Für $n = 7$ erhalten wir sieben reelle Nullstellen (mit CAS):

$$0.9725, 2.1319, 2.8406, 4, 5.1594, 5.8681, 7.0275$$

Eine Nullstelle, nämlich 4, ist ganzzahlig. Die zugehörige Rechnung gemäß (1) ist:

$$3+2+1+0+(-1)+(-2)+(-3)=3\times 2\times 1\times 0\times(-1)\times(-2)\times(-3) \tag{18}$$

Der Funktionsgraf ist punktsymmetrisch an der ganzzahligen Nullstelle (Abb. 8).

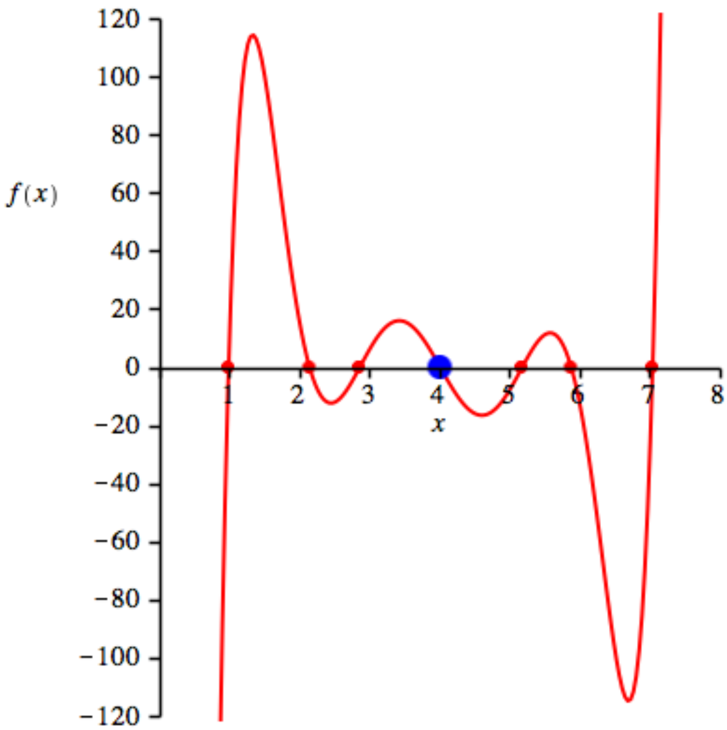

Abb. 8: Punktsymmetrie bei $n = 7$

Für $n = 8$ erhalten wir mit CAS 8 Nullstellen:

$$1.005628294, 1.972976355, 3.050440144, 3.970778058, 4.973493963, 6.049851041, 6.971346343, 8.005485802$$

Keine ist ganzzahlig. Die Nullstellen liegen aber nahe an ganzen Zahlen. Ein Unterscheiden von Auge ist kaum möglich (Abb. 9). Der Funktionsgraf hat keine Symmetrien, ist aber von einer Achsensymmetrie nicht weit entfernt.

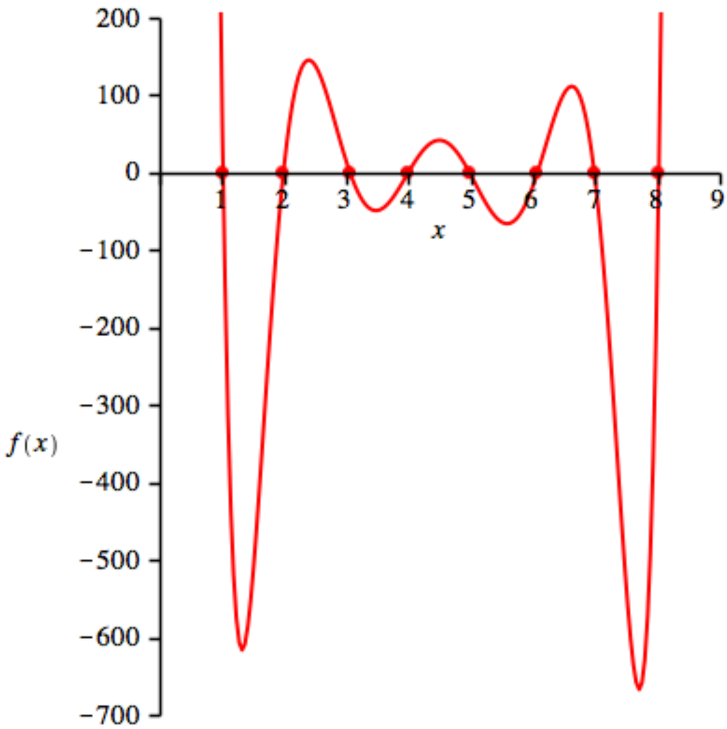

Abb. 9: Acht nicht beinahe ganzzahlige Nullstellen.

Für $n = 9$ erhalten wir 9 reelle Nullstellen (mit CAS):

$$0.9991091032, 2.005393850, 2.987567344, 4.012416665, 5, 5.987583335, \\ 7.012432656, 7.994606150, 9.000890897$$

Eine Nullstelle, nämlich 5, ist ganzzahlig. Die übrigen sind fast ganzzahlig.
Der Funktionsgraf ist punktsymmetrisch an der ganzzahligen Nullstelle (Abb. 10).

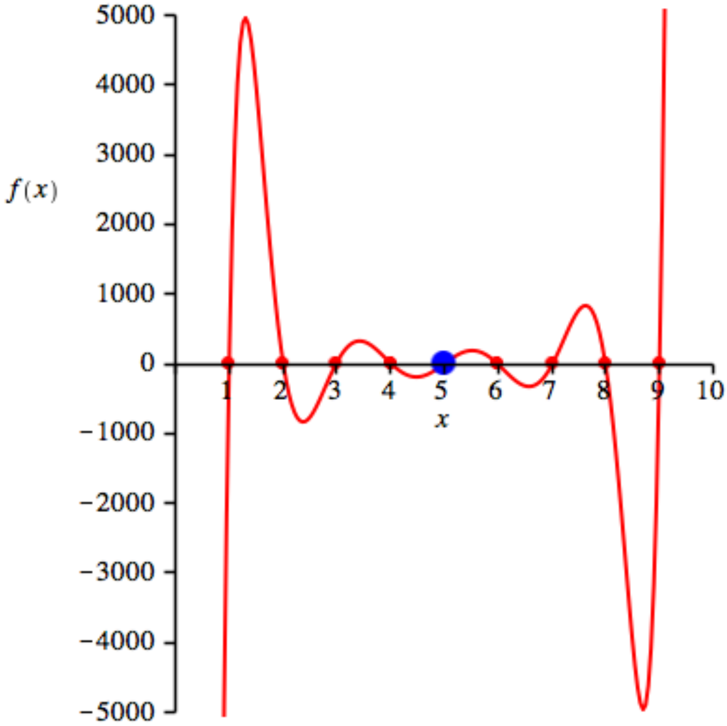

Abb. 10: Eine ganzzahlige und acht fast ganzzahlige Nullstellen

Für $n = 10$ erhalten wir mit CAS 10 Nullstellen:

$$1.000124048, 1.999133021, 3.002484452, 3.996527124, 5.001730708, 6.001741559, \\ 6.996528330, 8.002475928, 8.999130862, 10.00012397$$

Keine ist ganzzahlig. Die Nullstellen liegen aber nahe an ganzen Zahlen. Ein Unterscheiden von Auge ist kaum möglich (Abb. 11). Der Funktionsgraf hat keine Symmetrien, ist aber von einer Achsensymmetrie nicht weit entfernt.

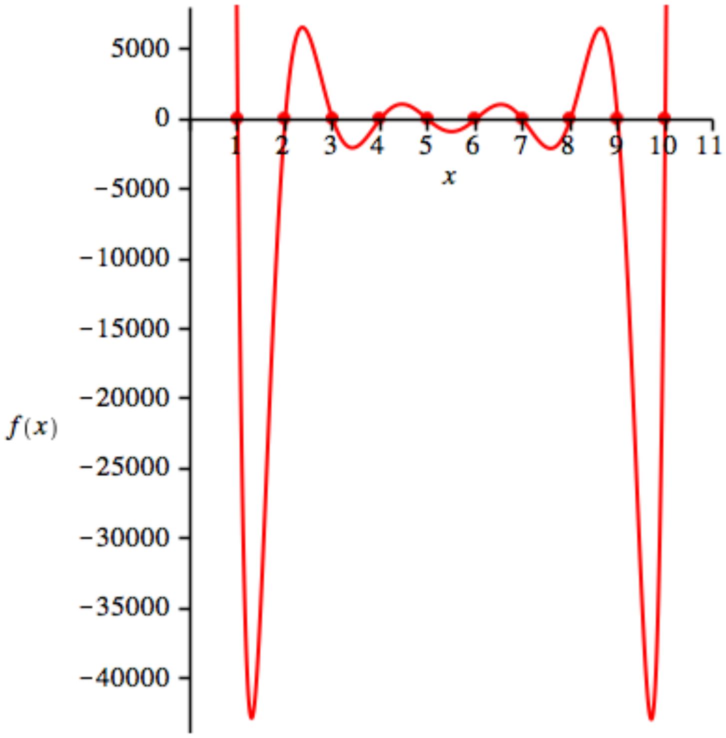

Abb. 11: Beinahe ganzzahlige Nullstellen und beinahe symmetrisch

Literatur

Walser, H. (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.

Websites

Hans Walser: 1 2 3
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/1/1_2_3_2/1_2_3_2.htm