Hans Walser, [20160625]

Summe der ungeraden Quadratzahlen

Anregung: Heinz Klaus Strick, Leverkusen

1 Worum geht es?

Wir illustrieren die Folge:

$$1 + 9 + 25 + 49 + 81 + \ldots \tag{1}$$

Formal:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \tag{2}$$

2 Rechnerischer Zugang

2.1 Explizite Formel

Es ist:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(4k^2 - 4k + 1\right) = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + n \tag{3}$$

Mit den einschlägigen Formeln für die einzelnen Summen erhalten wir:

$$s_n = \tfrac{4}{6} n(n+1)(2n+1) - \tfrac{4}{2} n(n+1) + n = \tfrac{4}{3} n^3 - \tfrac{1}{3} n \tag{4}$$

2.2 Rekursionsformel

Wegen (2) gilt mit dem Startwert $s_1 = 1$ die Rekursionsformel:

$$s_n = s_{n-1} + (2n-1)^2 \tag{5}$$

Damit kann die explizite Formel (4) induktiv verifiziert werden.

3 Geometrischer Zugang

3.1 Eine Pyramide

Wir bauen aus Einheitswürfeln eine Pyramide gemäß Abbildung 1. In jeder Pyramidenschicht haben wir eine ungerade Quadratzahl an Würfeln. Das Volumen der Pyramide ist also s_n.

In der Abbildung 1 ist $n = 4$. Die Pyramide hat 4 Schichten und am Boden eine Kantenlänge $2n - 1 = 7$.

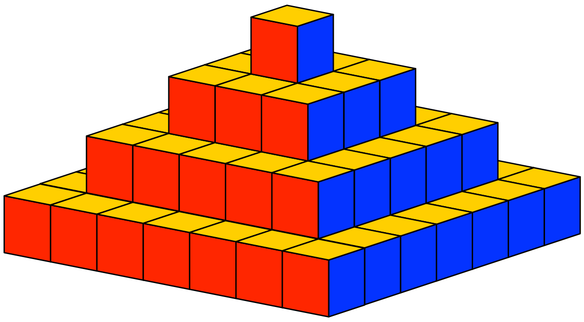

Abb. 1: Pyramide

3.2 Ergänzung zum Würfel

Wir nehmen eine zweite Pyramide, entfernen den obersten Würfel, und legen sie umgekehrt auf der erste Pyramide (Abb. 2).

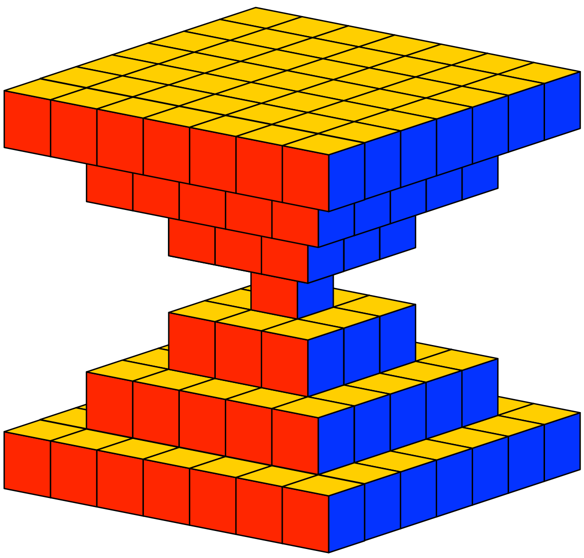

Abb. 2: Doppelpyramide

Der Umriss (die konvexe Hülle) der Doppelpyramide ist ein Würfel. Er hat die Kantenlänge $2n-1=7$.

Das Volumen der Doppelpyramide ist $2s_n-1$ (es fehlt der oberste Würfel der zweiten Pyramide).

3.3 Stabilisierung

Der kleine Würfel in der Mitte ist die konstruktive Schwachstelle. Wir stabilisieren durch den Einbau von Stützwänden (Abb. 3).

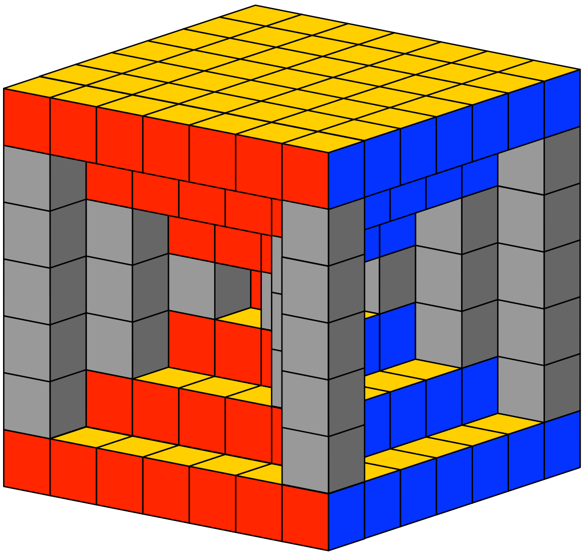

Abb. 3: Stützwände

Im Beispiel der Abbildung 3 besteht jede der vier Stützwände zuäußerst aus 5 grauen Würfeln, dann folgen 3 graue Würfel und zuinnerst ist noch ein grauer Würfel. Wir haben es also pro Stützwand mit der Summe 1 + 3 + 5 oder allgemein mit der Summe

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2k-1 \tag{6}$$

zu tun. Man überlege sich, dass die Obergrenze $n-1$ korrekt ist.

3.4 Summe der ungeraden Zahlen

Für die Summe der ungeraden Zahlen gilt die schöne und einfache Formel:

$$\sum_{j=1}^{m} (2j-1) = m^2 \tag{7}$$

Das Volumen der Doppelpyramide mit vier Stützwänden ist somit:

$$2s_n - 1 + 4(n-1)^2 \tag{8}$$

3.5 Weitere Pyramiden

Wir sehen in der Abbildung 3 auf allen vier Seiten ein Loch. Es hat die Form der Pyramide, allerdings nur mit $n - 1 = 3$ Lagen. Die Abbildung 4 zeigt exemplarisch, wie eine solche Seitenpyramide einzuschieben ist.

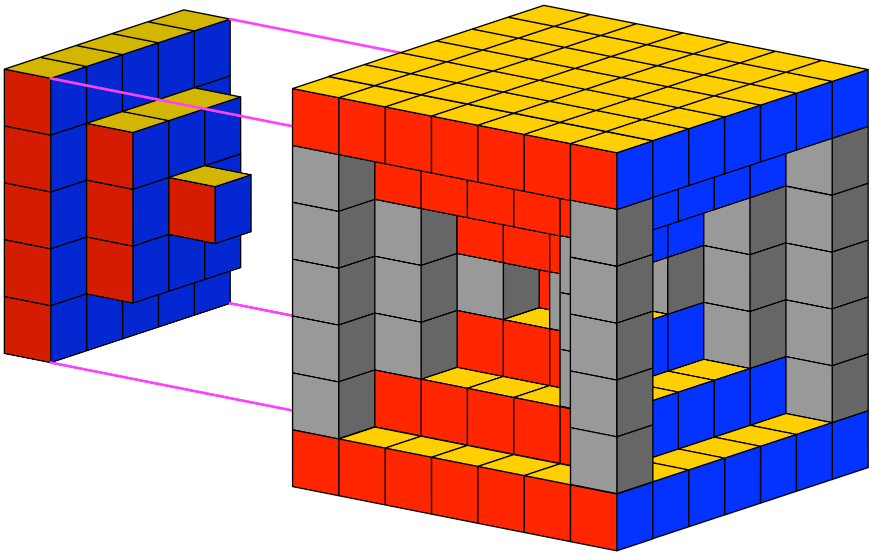

Abb. 4: Einschieben einer Seitenpyramide

Nach Einschieben von vier Seitenpyramiden ist der Würfel mit der Kantenlänge $2n - 1$ komplett. Wir haben die Volumengleichung:

$$(2n-1)^3 = 2s_n - 1 + 4(n-1)^2 + 4s_{n-1} \tag{9}$$

3.6 Rekursionsformel

Aus (9) gewinnen wir die Rekursionsformel:

$$s_n = \tfrac{1}{2}\left((2n-1)^3 + 1 - 4(n-1)^2 - 4s_{n-1}\right) = -2s_{n-1} + 4n^3 - 8n^2 + 7n - 2 \tag{10}$$

3.7 Explizite Formel

Wir subtrahieren die Rekursionsformel (5) von der Rekursionsformel (10):

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-2s_{n-1} + 4n^3 - 8n^2 + 7n - 2\right) - \left(s_{n-1} + (2n-1)^2\right) \\ &= -3s_{n-1} + 4n^3 - 12n^2 + 11n - 3 \end{aligned} \tag{11}$$

Somit ist:

$$s_{n-1} = \tfrac{1}{3}\left(4n^3 - 12n^2 + 11n - 3\right) \tag{12}$$

Wir substituieren n durch $n + 1$ und erhalten:

$$\begin{aligned} s_{(n+1)-1} &= \tfrac{1}{3}\left(4(n+1)^3 - 12(n+1)^2 + 11(n+1) - 3\right) \\ s_n &= \tfrac{1}{3}\left(4n^3 - n\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Dies ist die explizite Formel (4).

Websites

(25.06.2016)

Hans Walser: Summe ungerader Zahlen
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_ungerader_Zahlen/Ungerade_Zahlen.htm