Hans Walser, [20160626]

Summe der ungeraden Quadratzahlen

Anregung: Heinz Klaus Strick, Leverkusen

1 Worum geht es?

Wir illustrieren und berechnen mit einer räumlichen Überlegung die Folge:

$$1 + 9 + 25 + 49 + 81 + \ldots \tag{1}$$

Formal:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \tag{2}$$

2 Ein Treppenkörper

Wir bauen aus Einheitswürfeln einen Treppenkörper gemäß Abbildung 1.

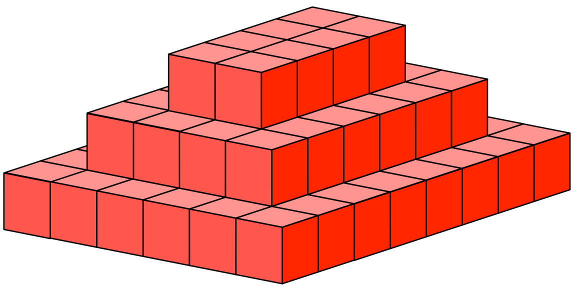

Abb. 1: Treppenkörper

Die einzelnen Schichten sind rechteckig. Die Rechtecklängen sind aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Die unterste Schicht hat die Länge $2n$ und die Breite $2n - 2$. Im Beispiel der Abbildung 1 ist $n = 4$.

Mit t_n bezeichnen wir das Volumen des Treppenkörpers. Es ist:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} 2k(2k-2) \tag{3}$$

Man beachte, dass der erste Summand in (3) null ist und überlege sich, wo das im Treppenkörper der Abbildung 1 einsehbar wäre.

3 Sechs Treppenkörper und ein Würfel

Wir bauen sechs kongruente Treppenkörper in den Farben rot, grün, blau, zyan, magenta und gelb. Diese fügen wir so zusammen, dass das Ganze in einen Würfel der Kantenlänge $2n$ passt (Abb. 2).

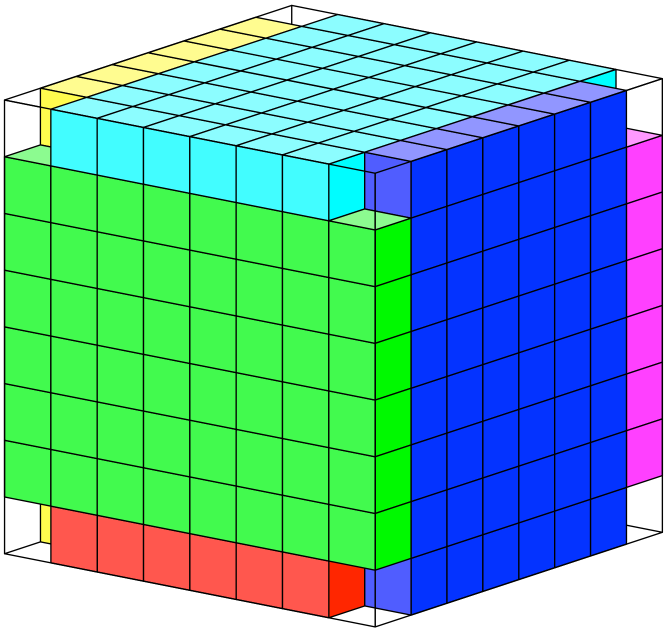

Abb. 2: Einpassen in einen Würfel

Die Abbildung 3 zeigt ein Zwischenstadium mit dem Zusammenbau nur der Treppenkörper in den Farben rot, magenta und gelb.

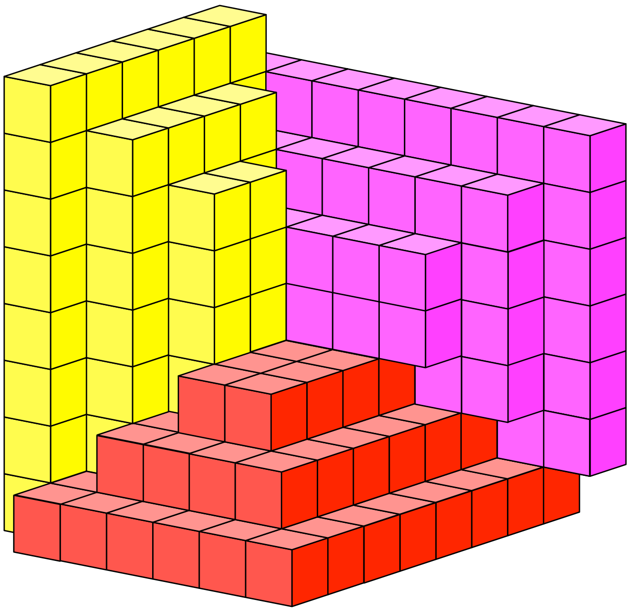

Abb. 3: Zwischenstadium

Die sechs Treppenkörper füllen den großen Würfel mit der Kantenlänge $2n$ nicht vollständig aus. Bereits an den Ecken fehlen die kleinen Eckwürfelchen. Auch im Innern gibt es Hohlräume, insbesondere im Zentrum einen Hohlraumwürfel der Kantenlänge 2.

Unsere Raumvorstellung sagt uns, dass die Hohlräume aus Einheitswürfeln entlang der vier Raumdiagonalen des großen Würfels bestehen (Abb. 4). Die Hohlraum-Einheitswürfel längs einer Diagonalen sind übereck angeordnet.

Pro Diagonale haben wir $2n$ Hohlraumwürfel. Der gesamte Hohlraum ist also $8n$.

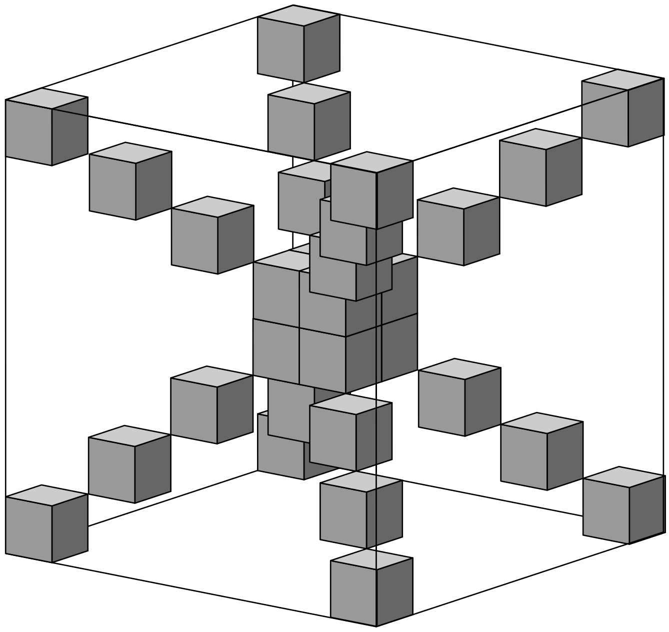

Abb. 4: Hohlräume

4 Volumen der Treppenkörper

Der große Würfel mit der Kantenlänge $2n$ besteht also aus sechs Treppenkörpern und dem Hohlraum $8n$. So erhalten wir die Volumengleichung:

$$(2n)^3 = 6t_n + 8n \tag{4}$$

Daraus ergibt sich:

$$t_n = \tfrac{4}{3}\left(n^3 - n\right) \tag{5}$$

Soweit so gut, aber was hat das mit *ungeraden* Quadratzahlen zu tun?

5 Ungerade Quadratzahlen

Die Schichten unseres Treppenkörpers bestehen aus Rechtecken, deren Seitenlängen zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen sind. Dazwischen ist jeweils eine ungerade Zahl. Wir können die beiden geraden Zahlen auf diese ungerade Zahl beziehen:

$$2k(2k-2) = \big((2k-1)+1\big)\big((2k-1)-1\big) = (2k-1)^2 - 1 \tag{6}$$

Es kommen die Quadrate der ungeraden Zahlen ins Spiel. Wir erhalten aus (3):

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} 2k(2k-2) = \sum_{k=1}^{n} \left((2k-1)^2 - 1 \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \right) - n = s_n - n \tag{7}$$

Wegen (5) ergibt sich für die Summe s_n der ungeraden Quadratzahlen:

$$s_n = t_n + n = \tfrac{4}{3}\left(n^3 - n\right) + n = \tfrac{4}{3}n^3 - \tfrac{1}{3}n \tag{8}$$