

Hans Walser, [20200307]

Summe ungerader Zahlen

Idee und Anregung: M. S., B.

1 Worum geht es?

Visuelle Beweise für die Summenformel der erste n ungeraden Zahlen

$$1+3+5+7+\dots=\sum_{k=1}^n 2k-1=n^2 \quad (1)$$

unter Verwendung eckiger Spiralen.

2 Aufbau der eckigen Spirale

Die Abbildungsfolge 1 zeigt den Aufbau der Spirale.



Abb. 1.1: Rechteck der Länge 1 (Quadrat)

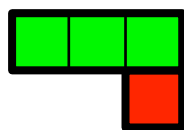


Abb. 1.3: Rechteck der Länge 3 ansetzen

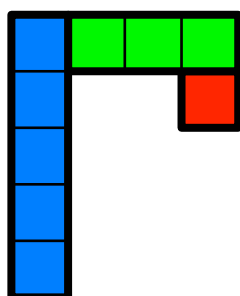


Abb. 1.5: Rechteck der Länge 5 ansetzen

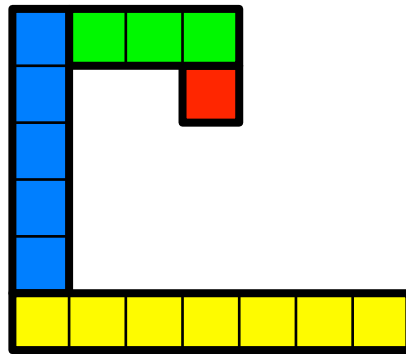


Abb. 1.7: Rechteck der Länge 7 ansetzen

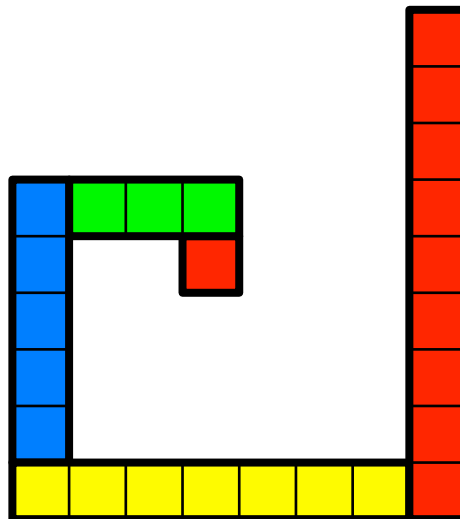


Abb. 1.9: Rechteck der Länge 9 ansetzen

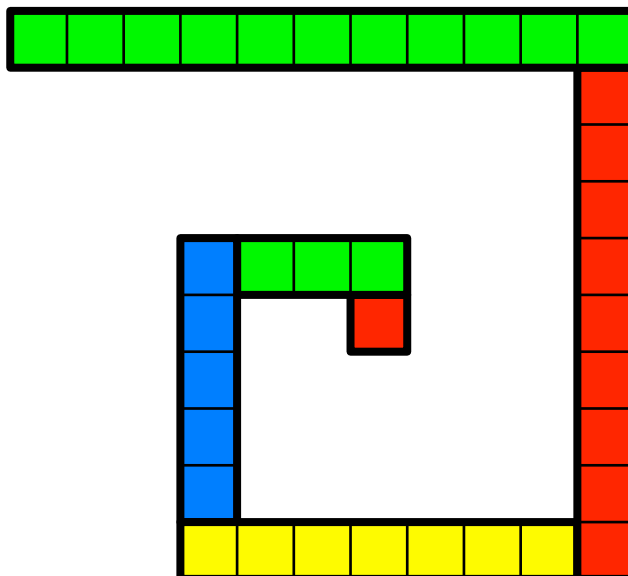


Abb. 1.11: Rechteck der Länge 11 ansetzen

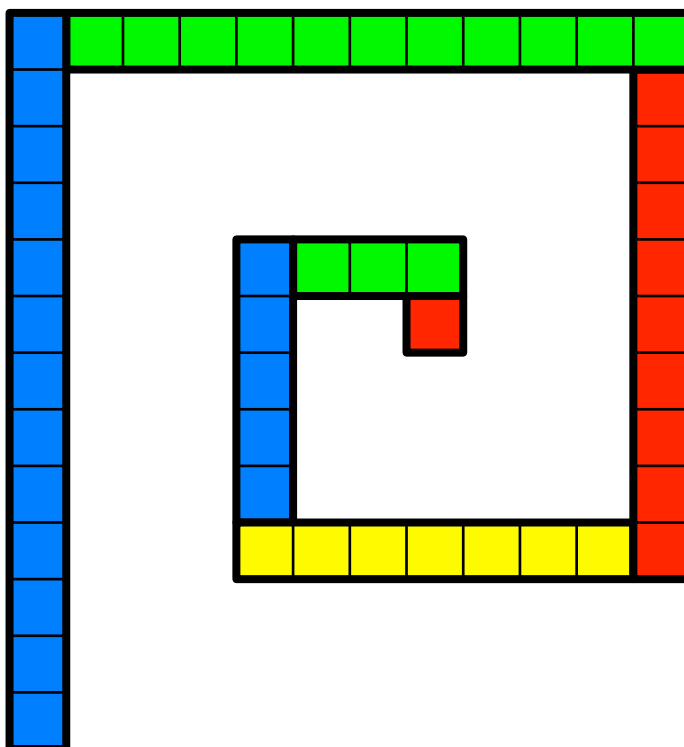


Abb. 1.13: Rechteck der Länge 13 ansetzen

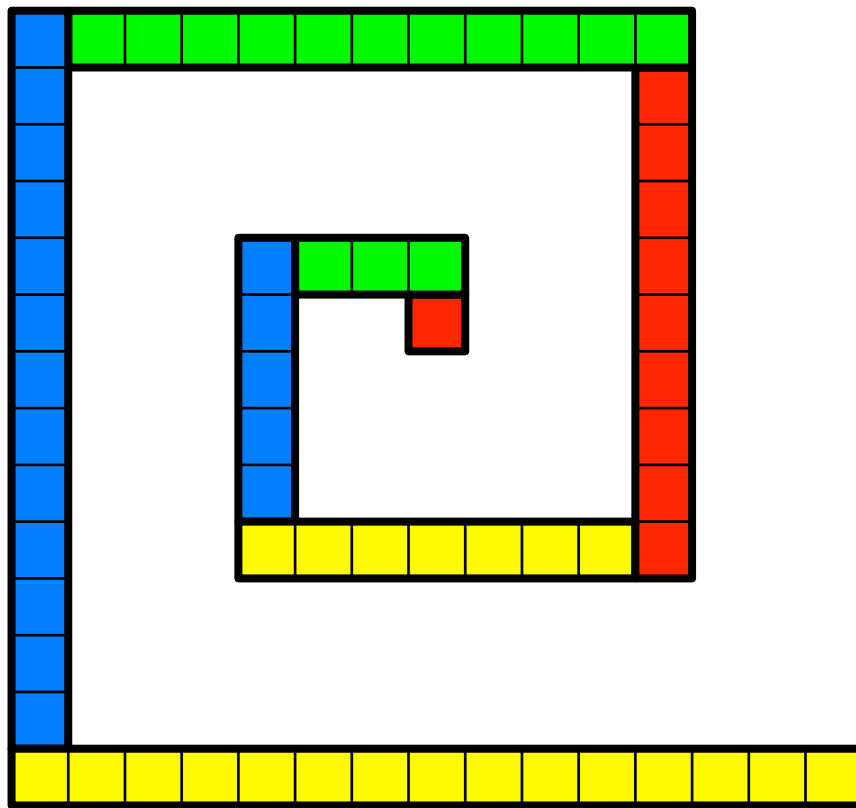


Abb. 1.15: Rechteck der Länge 15 ansetzen

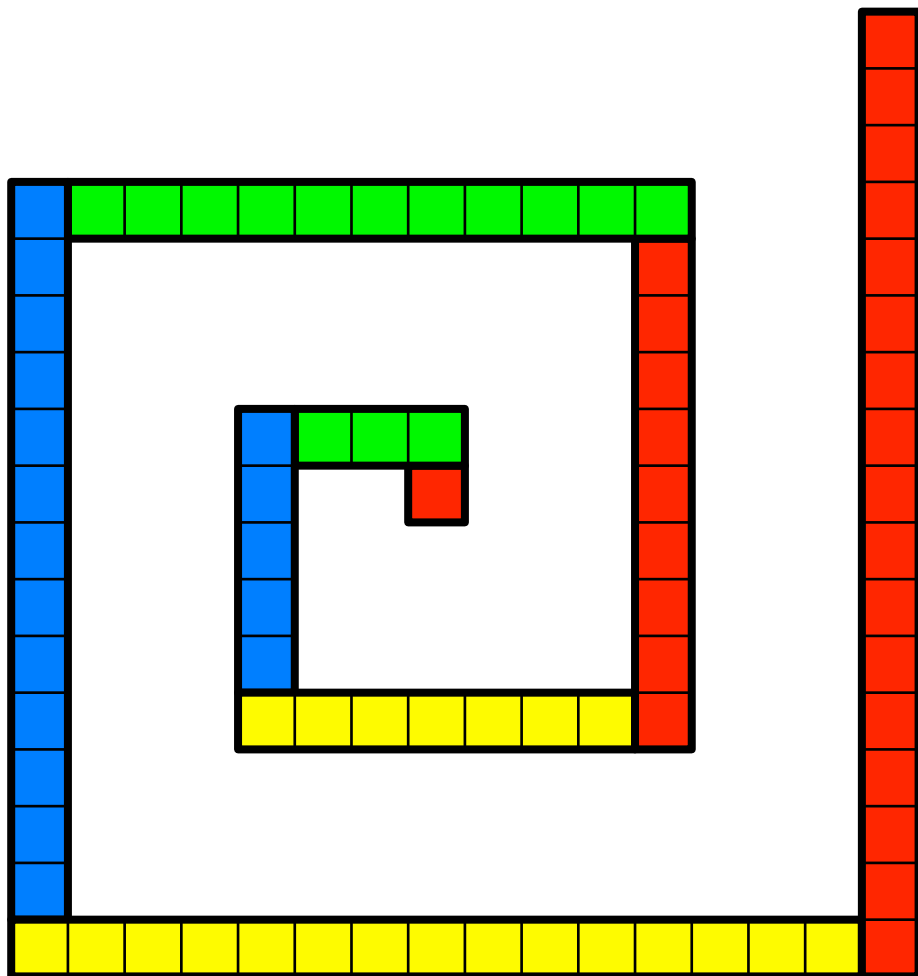


Abb. 1.17: Rechteck der Länge 17 ansetzen

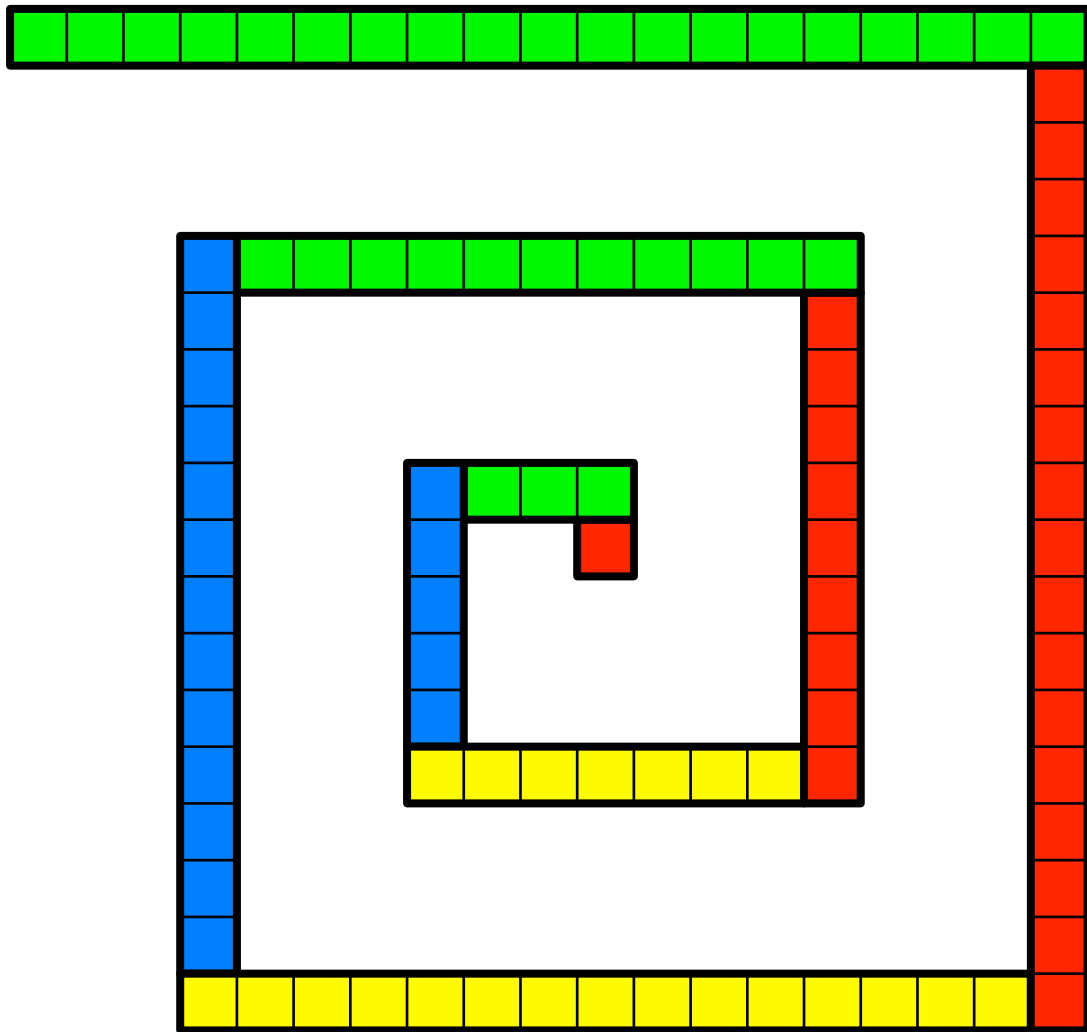


Abb. 1.19: Rechteck der Länge 19 ansetzen

Die Abbildung 2 zeigt die leere Spirale.

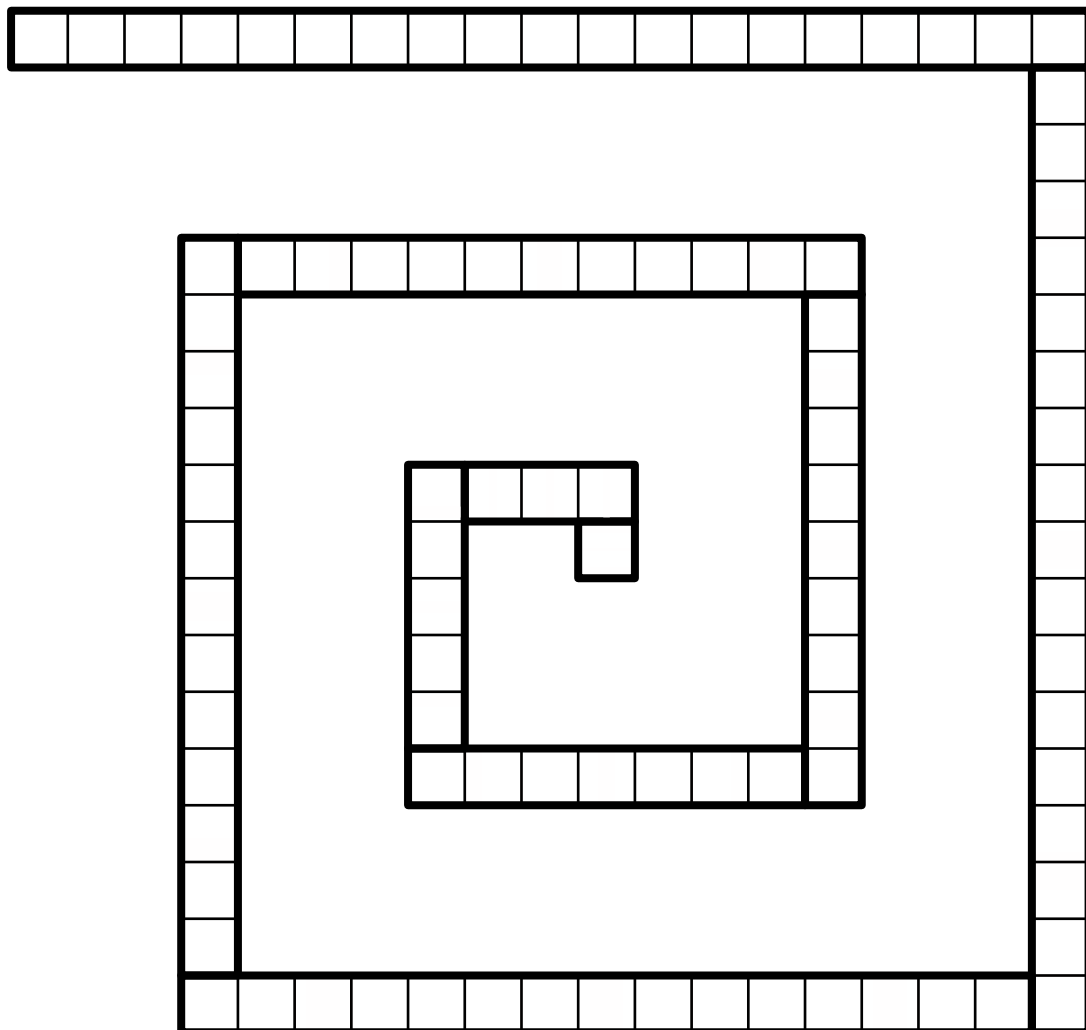


Abb. 2: Leere Spirale

Die Zahlen liegen auf vertikalen und horizontalen Linien (Abb. 5).

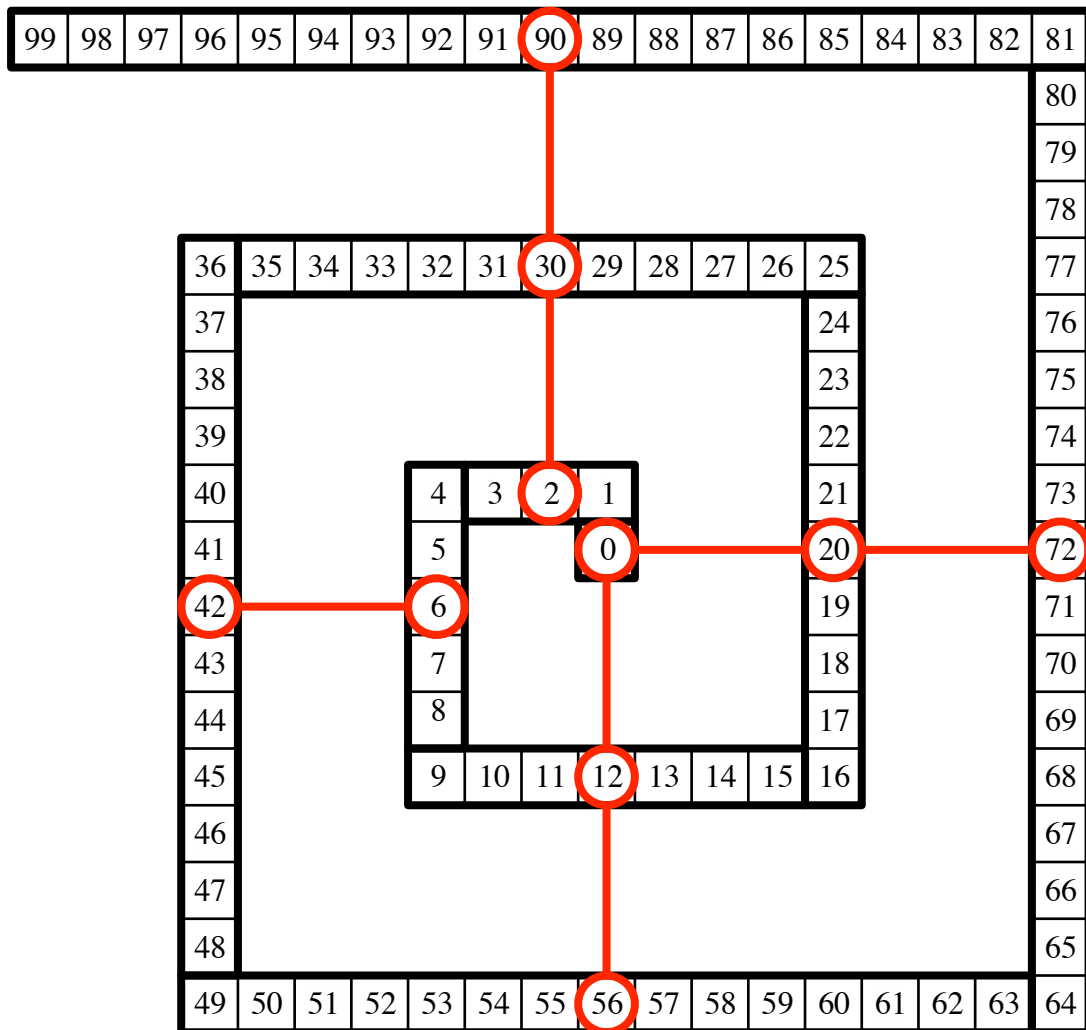


Abb. 5: Vertikale und horizontale Linien

4 Abknicken

Wir knicken nun in jedem der markierten Felder um 90° . Aus den Rechtecken werden gleichschenklige rechte Winkel.

Damit erhalten wir die kompakte Spirale der Abbildung 6. Die Gesamtfigur ist ein Quadrat.

Es handelt sich dabei um die Ulam-Spirale, wobei die Nummerierung mit null beginnt.

90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
91	56	55	54	53	52	51	50	49	80
92	57	30	29	28	27	26	25	48	79
93	58	31	12	11	10	9	24	47	78
94	59	32	13	2	1	8	23	46	77
95	60	33	14	3	0	7	22	45	76
96	61	34	15	4	5	6	21	44	75
97	62	35	16	17	18	19	20	43	74
98	63	36	37	38	39	40	41	42	73
99	64	65	66	67	68	69	70	71	72

Abb. 6: Abgeknickt

Die Abbildung 7 zeigt dieselbe Figur ohne Zahlen. Wir erkennen die gleichschenkligen rechten Winkel.

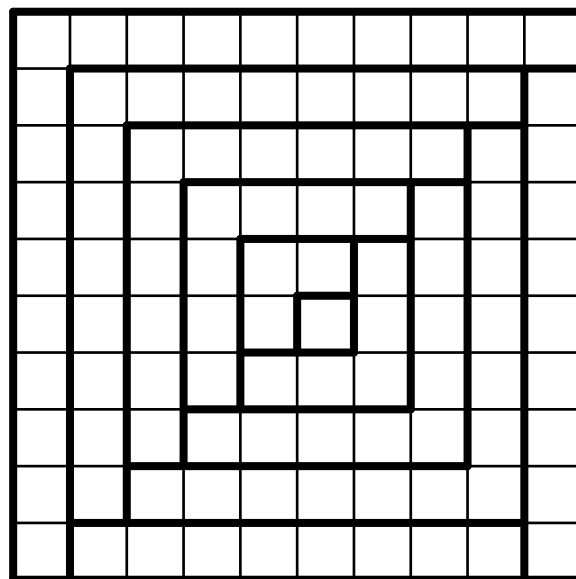


Abb. 7: Gleichschenklige rechte Winkel

In der Abbildung 8 sind diese Winkel farbig hervorgehoben. Jeder Winkel enthält eine ungerade Anzahl von quadratischen Feldern.

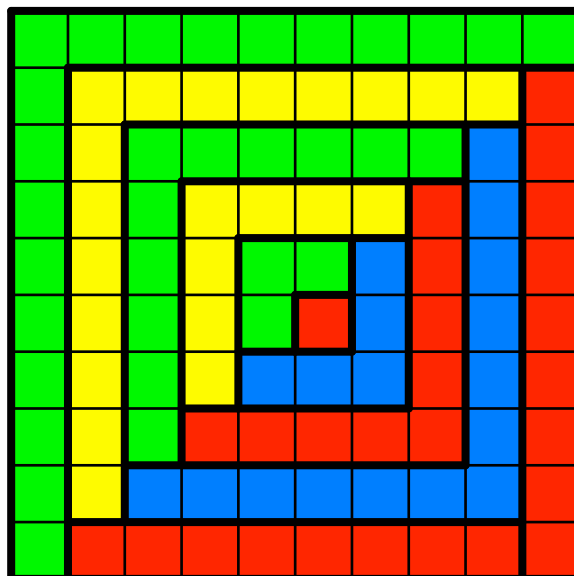


Abb. 8: Farbige Winkel

Websites

Hans Walser: Summe ungerader Zahlen

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_ungerader_Zahlen/Ungerade_Zahlen.htm

Hans Walser: Summe ungerader Zahlen

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_ungerader_Zahlen3/Summe_ungerader_Zahlen3.htm