Hans Walser, [20200322]

# Summe ungerader Zahlen

Idee und Anregung: Marc Sauerwein, Bonn

## 1 Worum geht es?

Visualisierung der Summenformel der ersten $n$ ungeraden Zahlen:

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n} 2k-1=n^2 \tag{1}$$

Zur Visualisierung werden eckige Spiralen verwendet. Sie visualisieren den Fall $n = 6$.

## 2 Vier Spiralen

Die Abbildungsfolge 1 zeigt den Aufbau einer Spirale. Wir beginnen mit einem Quadrat.

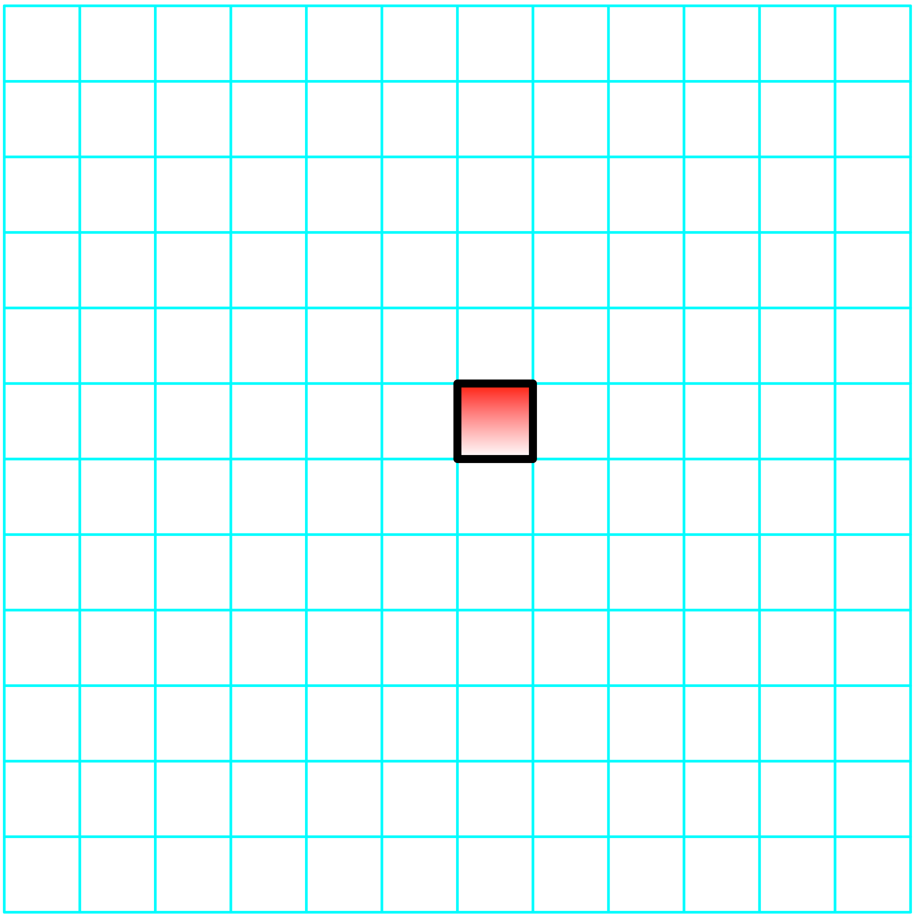

Abb. 1.1: Startquadrat

Nun setzen wir quer einen Streifen mit drei Quadraten an.

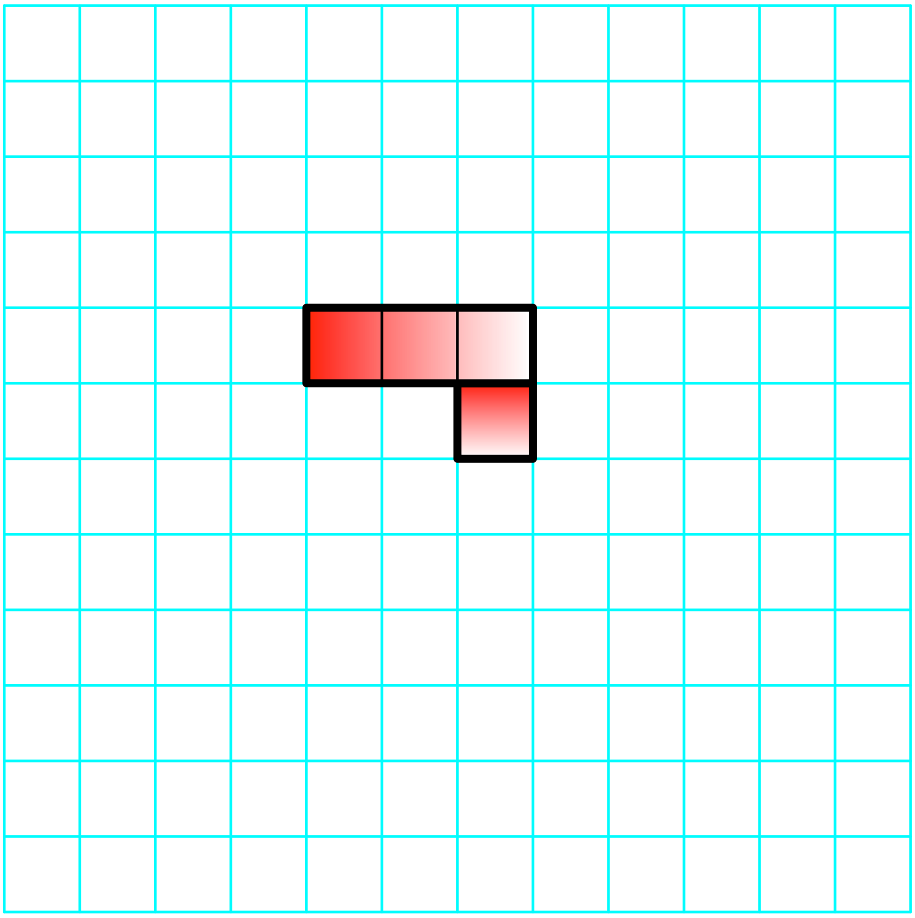

Abb. 1.2: 1 + 3

Nun ein Streifen mit fünf Quadraten.

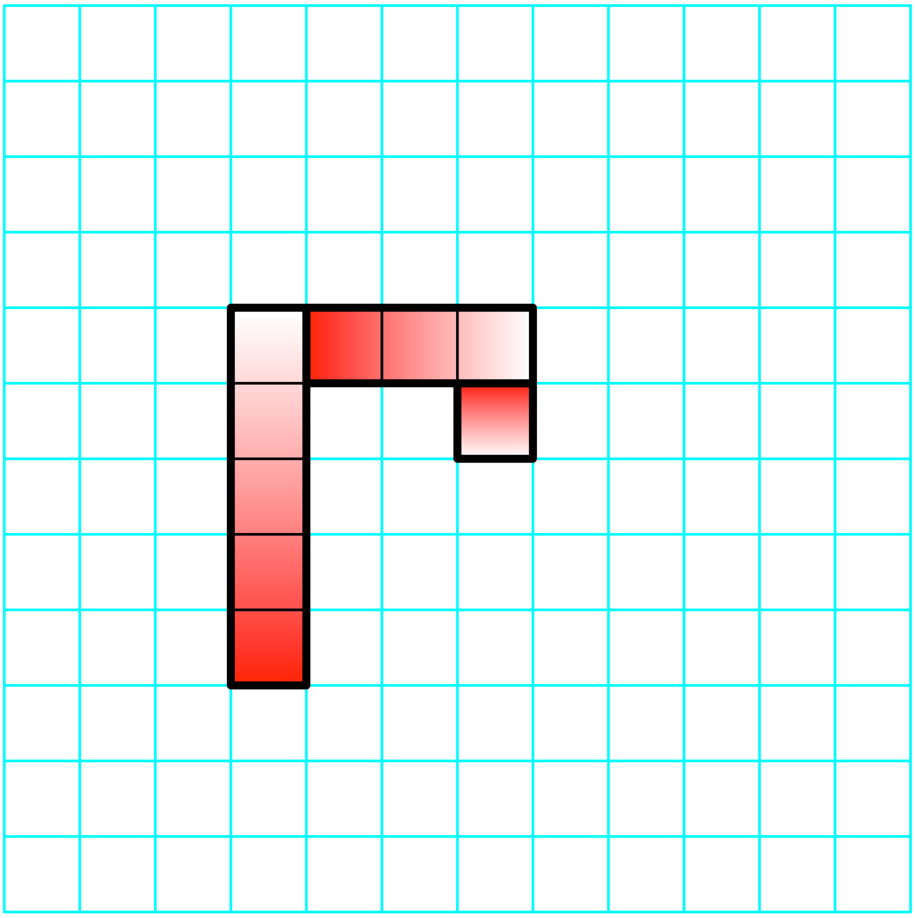

Abb. 1.3: 1 + 3 + 5

Und so weiter.

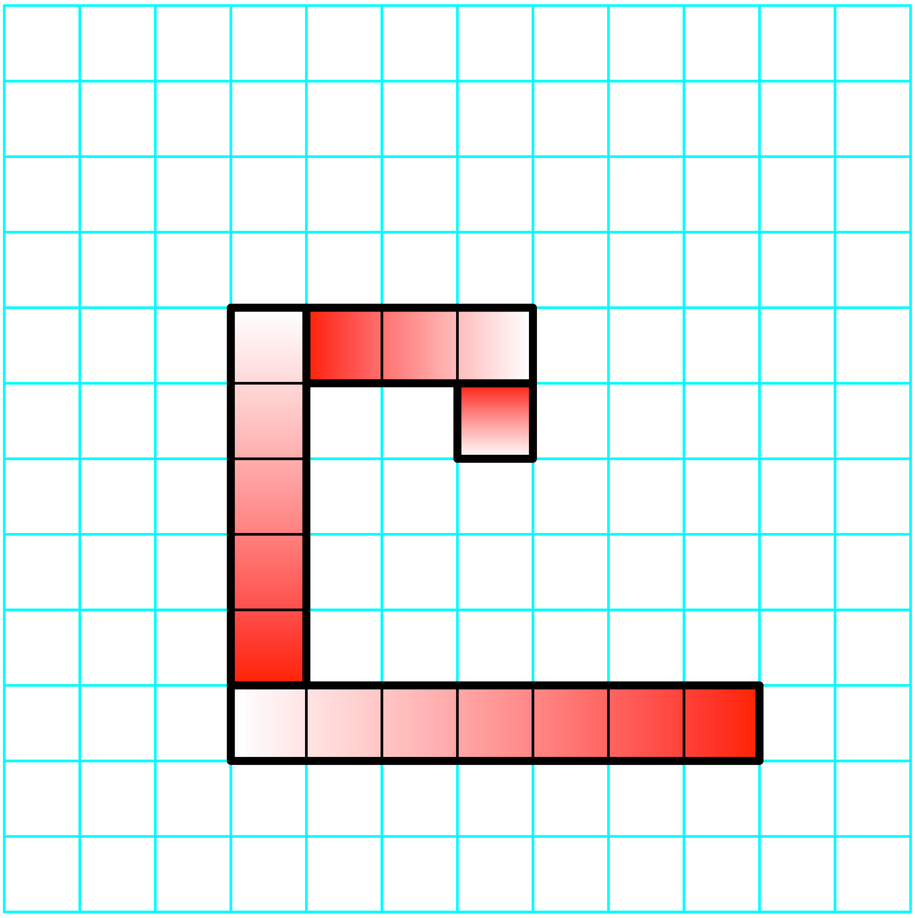

Abb. 1.4: 1 + 3 + 5 + 7

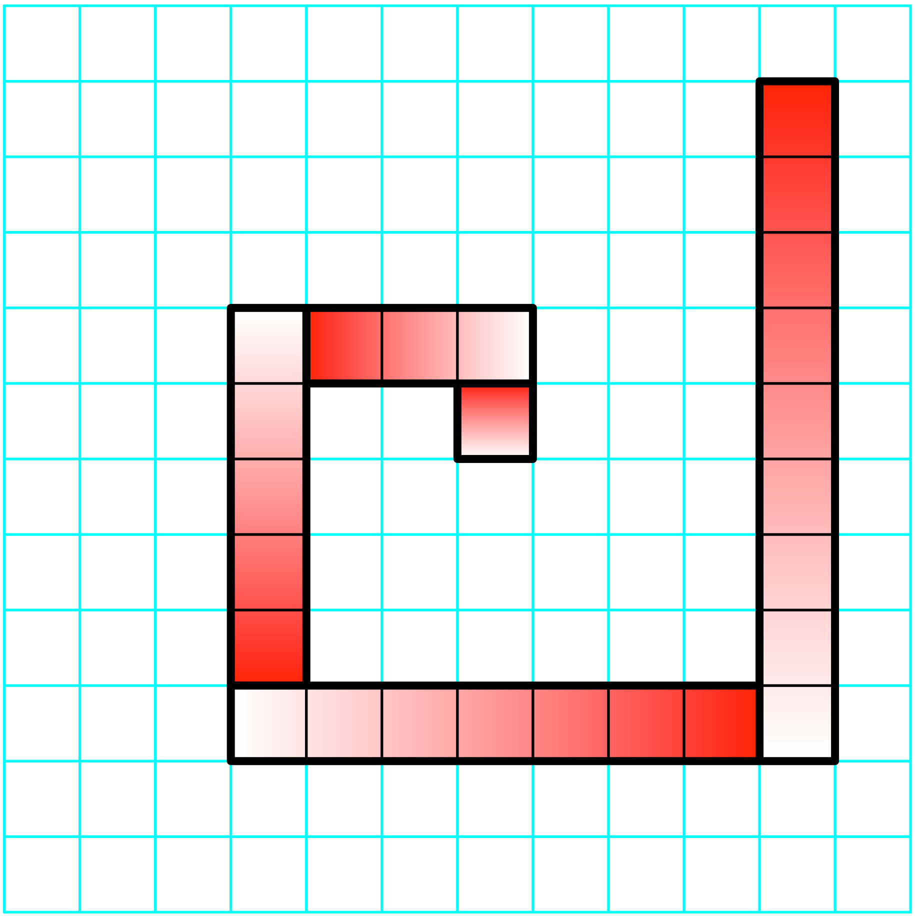

Abb. 1.5: 1 + 3 + 5 + 7 + 9

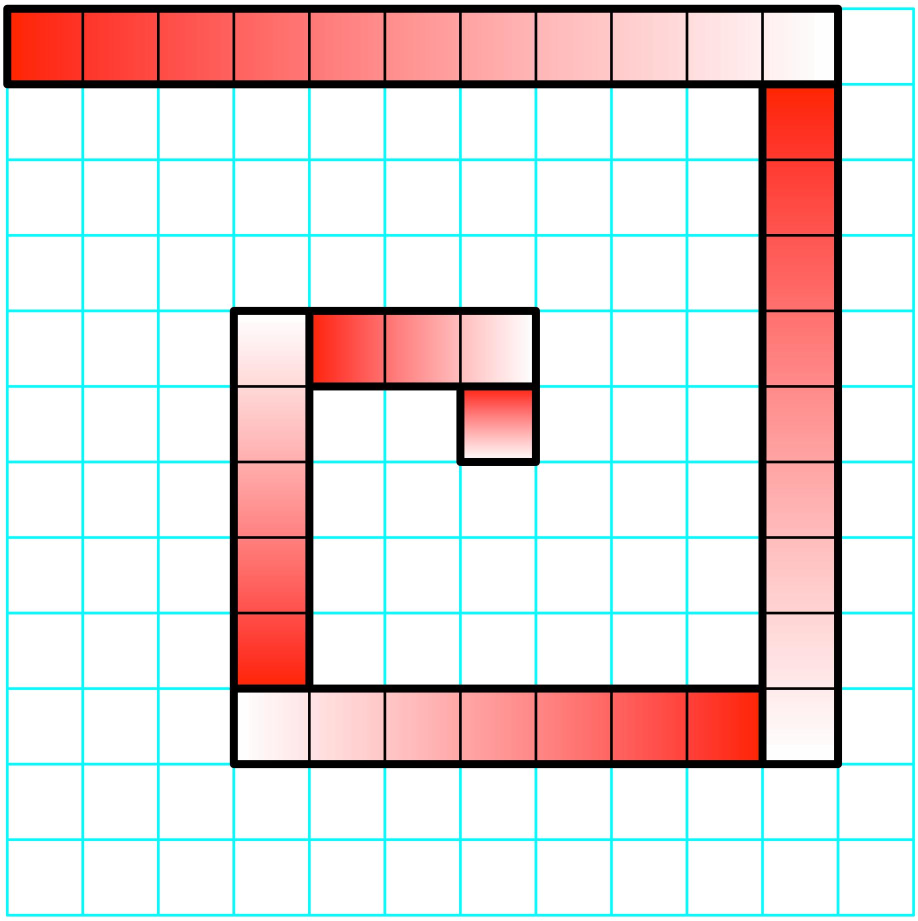

Abb. 1.6: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11

Es entsteht eine eckige Spirale. Die Anzahl der Quadrate ist gleich der Summe der $n$ ersten ungeraden Zahlen. Der äußerste Schenkel hat die Länge $2n - 1$.

Wir bauen nun vier solche Spiralen. Diese können wir ineinanderfügen (Abb. 2). Es entsteht ein großes Quadrat mit der Seitenlänge $2n$.

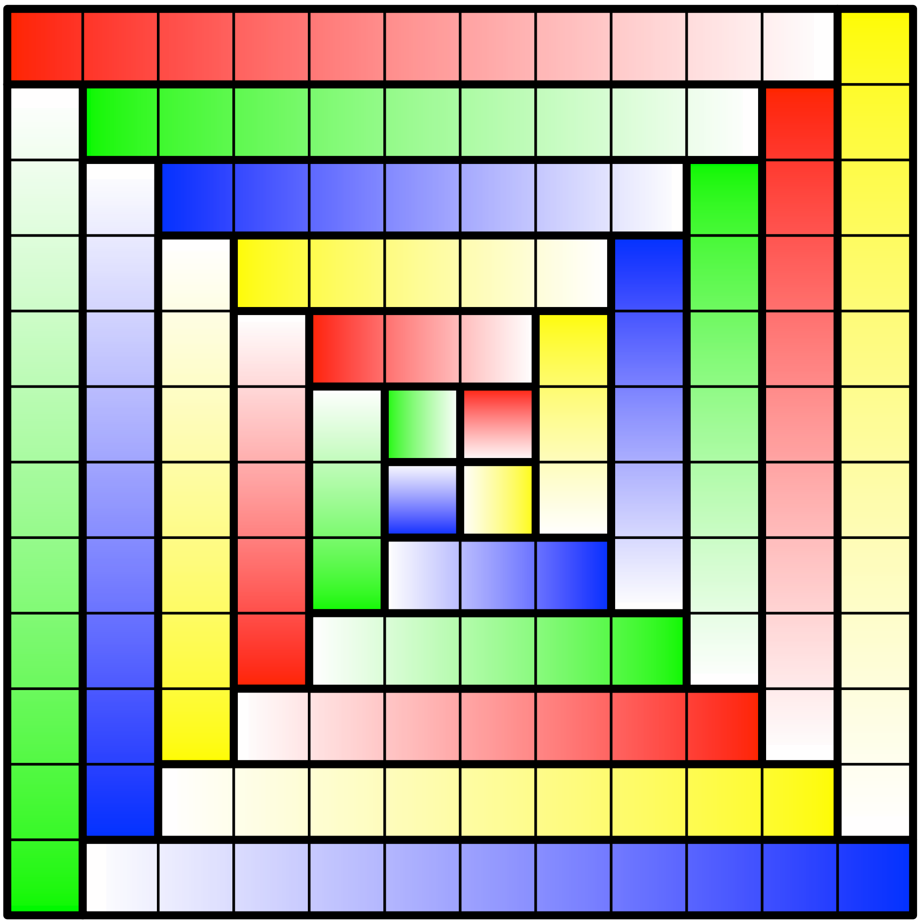

Abb. 2: Vier Spiralen

Das große Quadrat besteht also aus $(2n)^2 = 4n^2$ kleinen Quadraten. Für jede der vier Spiralen sind das $n^2$ kleine Quadrate. Damit ist (1) gezeigt.

## 3 Drei Spiralen

Die Startfigur besteht je nach Sichtweise aus einem Rhombus mit dem Spitzenwinkel 60° oder aus einem Quadrat auf der Oberfläche eines Würfels.

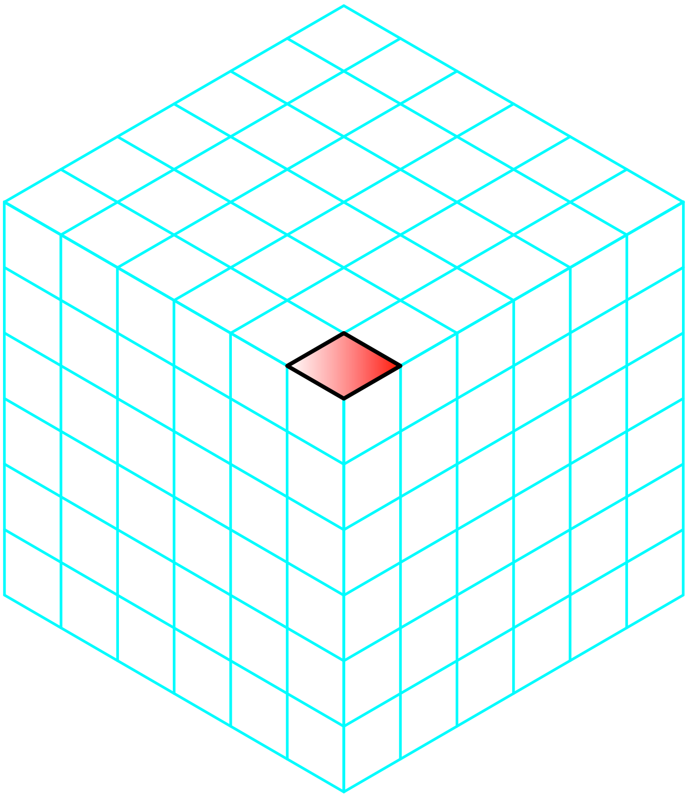

Abb. 3.1: Startfigur

Wir setzen nun einen Streifen aus drei weiteren Rhomben oder aus drei Quadraten an.

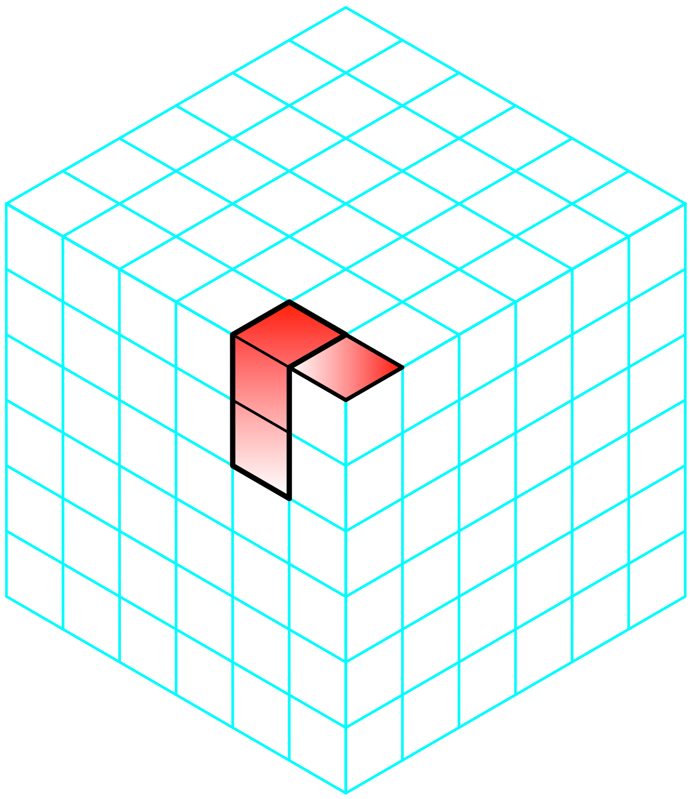

**Abb. 3.2: 1 + 3**

Und so weiter.

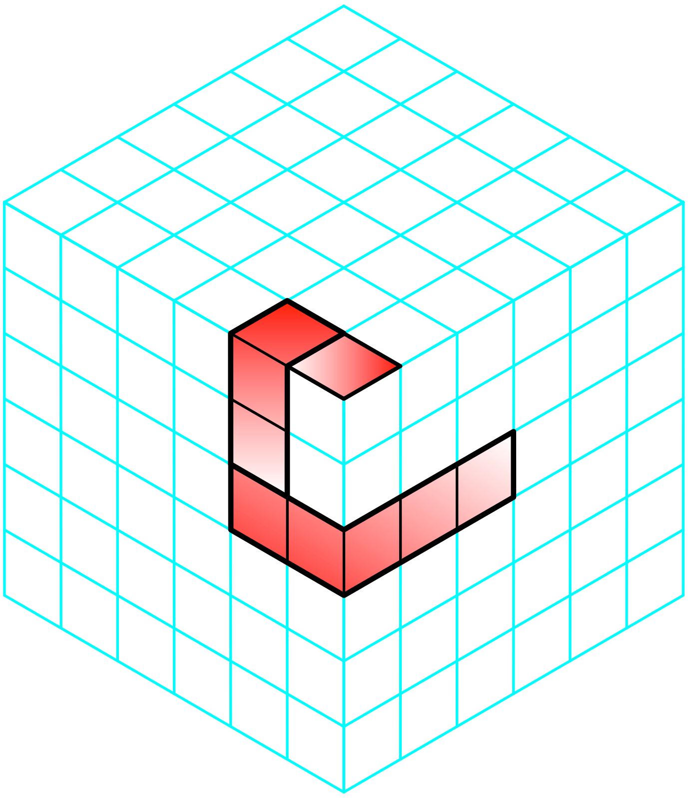

**Abb. 3.3: 1 + 3 + 5**

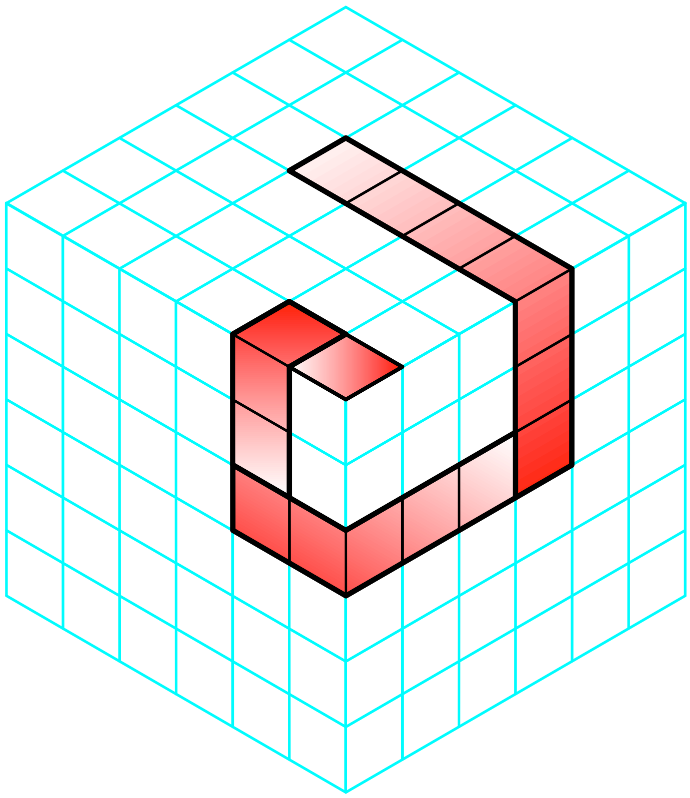

Abb. 3.4: 1 + 3 + 5 + 7

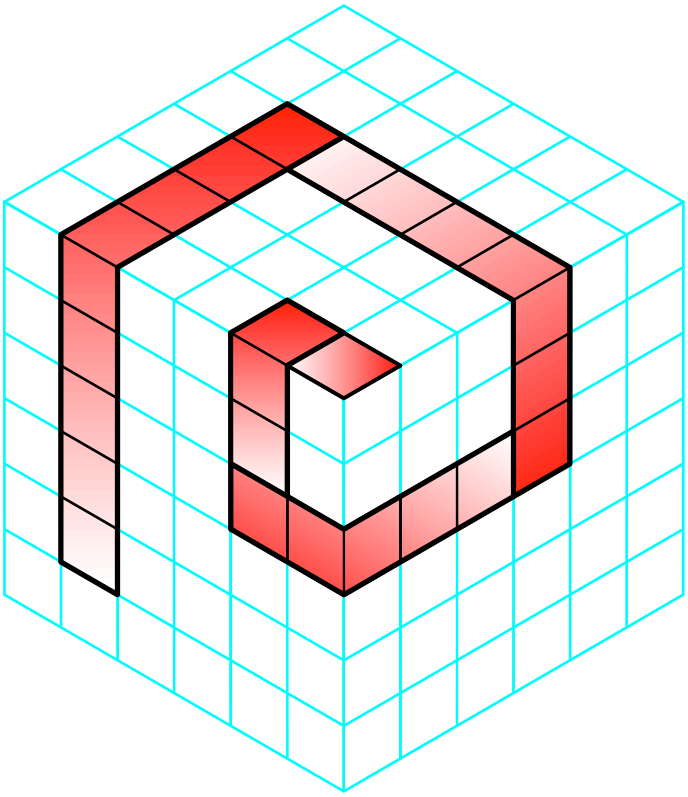

Abb. 3.5: 1 + 3 + 5 + 7 + 9

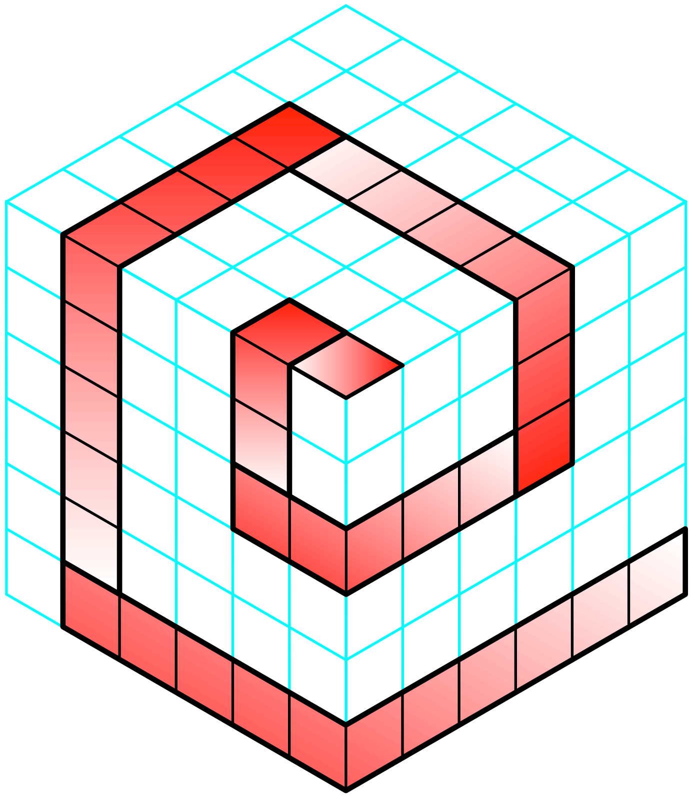

Abb. 3.6: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 +11

Es entsteht eine eckige Spirale. Die Anzahl der Quadrate ist gleich der Summe der $n$ ersten ungeraden Zahlen.

Wir bauen nun drei solche Spiralen. Diese können wir ineinanderfügen (Abb. 4). Die drei Spiralen bedecken drei Seitenquadrate eines Würfels der Kantenlänge $n$.

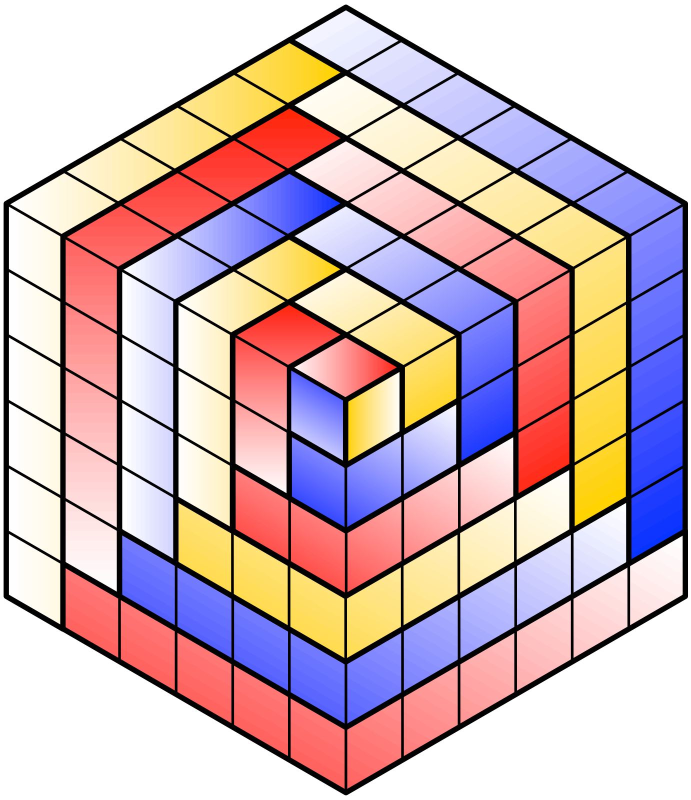

**Abb. 4: Würfel**

Die drei sichtbaren Seitenquadrate des großen Würfels enthalten insgesamt $3n^2$ kleine Quadrate. Damit ist (1) gezeigt.

## 4 Fünf Spiralen

Es ist der Leserin oder dem Leser überlassen, wie ob sie oder er die Figur der Abbildung 5 als Folge von Rhomben mit dem Spitzenwinkel 72° oder als eine Ecke eines 5d-Hyperwürfels oder als eine Figur in der hyperbolischen Geometrie sehen will.

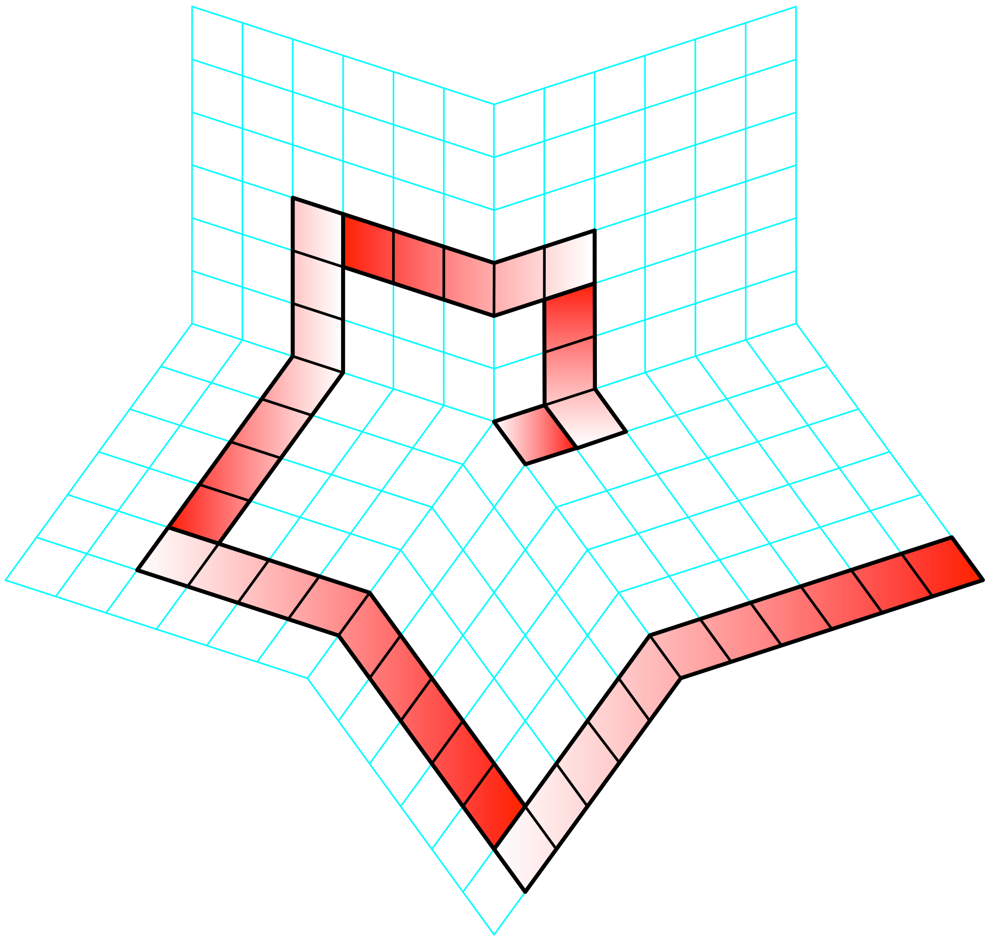

**Abb. 5: Spirale**

Fünf solche Spiralen (Abb. 6) führen wiederum zu einem Beweis von (1).

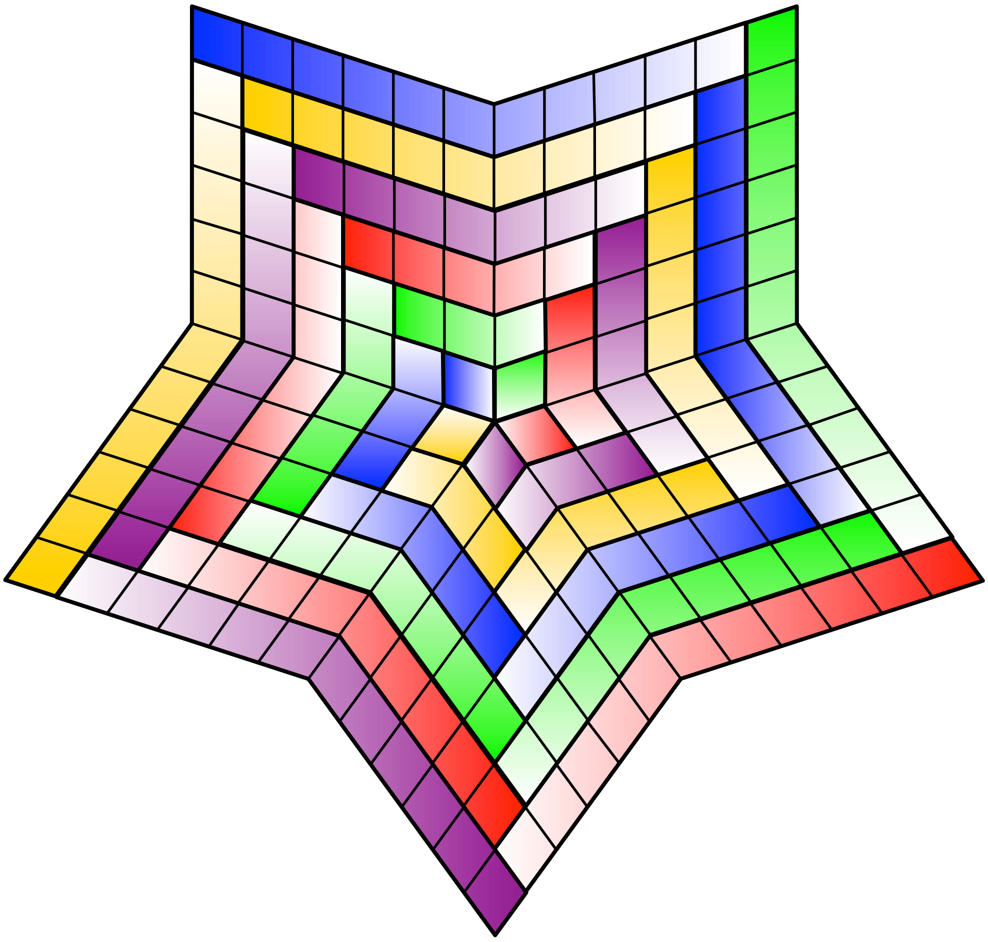

Abb. 6: Fünf Spiralen

## Websites

Hans Walser: Summe ungerader Zahlen
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_ungerader_Zahlen/Ungerade_Zahlen.htm

Hans Walser: Summe ungerader Zahlen
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_ungerader_Zahlen2/Summe_ungerader_Zahlen2.htm

Hans Walser: Summe ungerader Zahlen
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_ungerader_Zahlen3/Summe_ungerader_Zahlen3.htm

Hans Walser: Summe ungerader Zahlen
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_ungerader_Zahlen5/Summe_ungerader_Zahlen5.htm