

Hans Walser, [20131129]

Summen von Kuben

1 Worum geht es?

Wir suchen ganzzahlige Lösungen der kubischen Gleichung:

$$a^3 + b^3 + c^3 = d^3$$

2 Beispiele

Die Tabelle zeigt einige Lösungen mit natürlichen Zahlen. Die Lösungen wurden mit brute force gefunden.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	6	8	9
2	17	40	41
3	4	5	6
3	10	18	19
3	36	37	46
4	17	22	25
6	32	33	41
7	14	17	20
11	15	27	29
15	42	49	58
16	23	41	44
18	19	21	28
27	30	37	46
29	34	44	53

3 Illustration

Die Abbildung 1 illustriert das einfachste Beispiel: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ und $d = 6$.

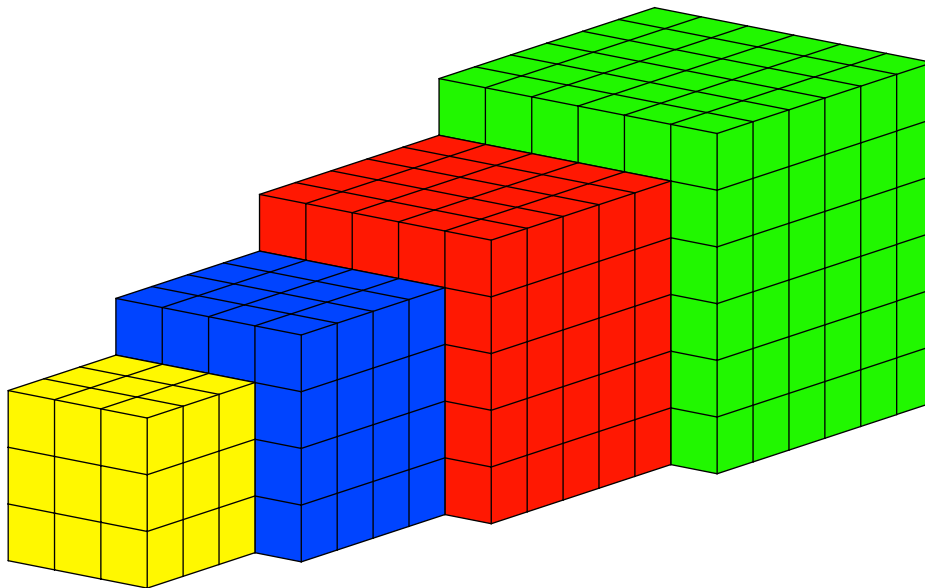


Abb. 1: Gelb + Blau + Rot = Grün

Die Abbildung 2 zeigt in mehreren Schritten den Umbau von Gelb + Blau + Rot in Grün.

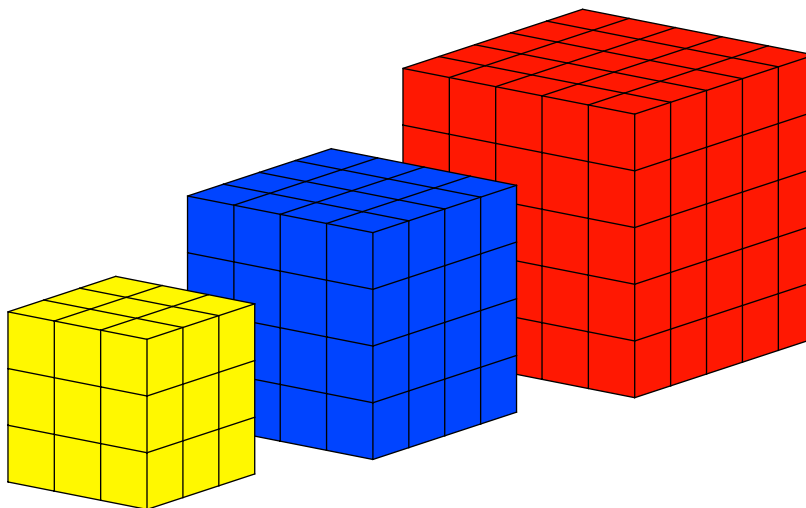


Abb. 2.1: Ausgangslage

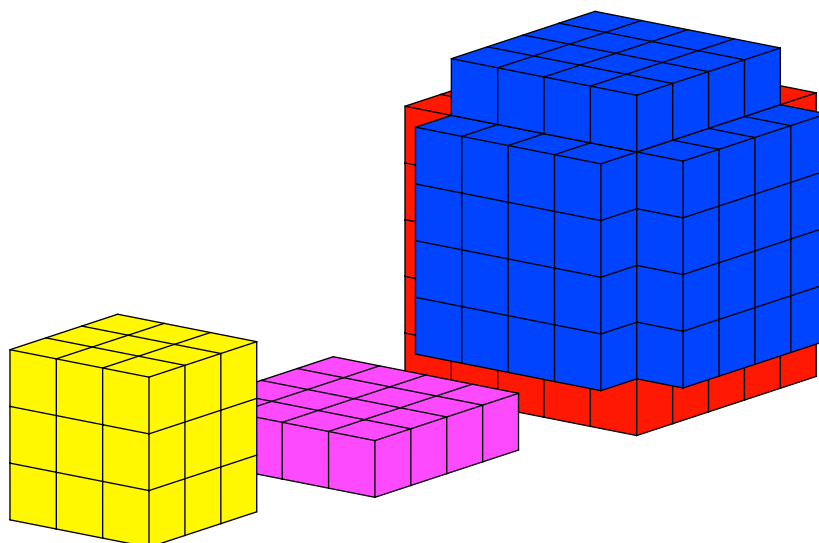


Abb. 2.1: Erster Schritt

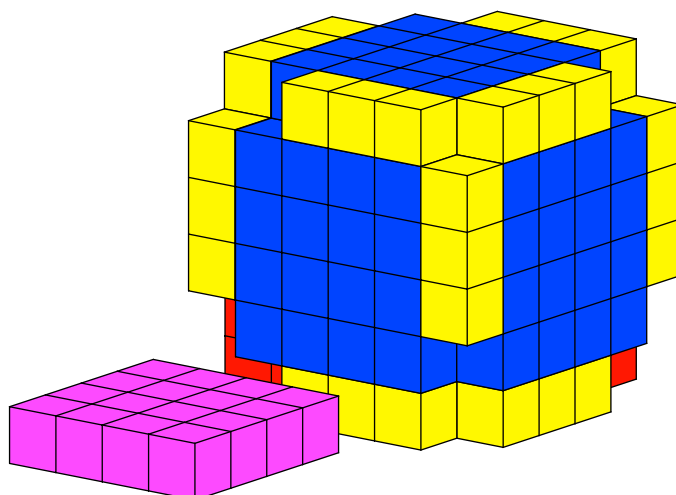
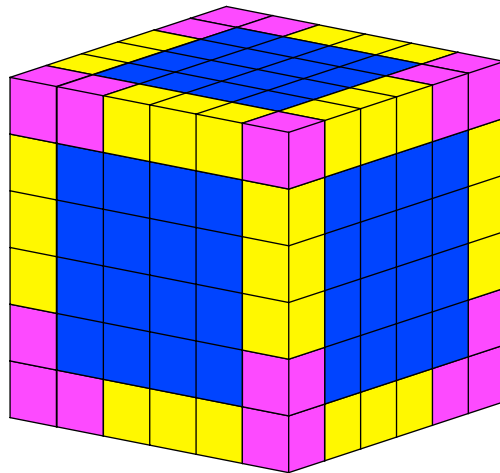


Abb. 2.2: Zweiter Schritt

**Abb. 2.3: Dritter Schritt**

Projekt: Kuben analog zum Soma-Würfel (hier der gelbe Würfel) zerlegen.

4 Negative Zahlen

Wir lassen nun zu, dass c und allenfalls d negativ sind. Dabei soll aber $|c| \neq a, b$ sein, um triviale Lösungen zu vermeiden. Die Tabelle zeigt einige Lösungen:

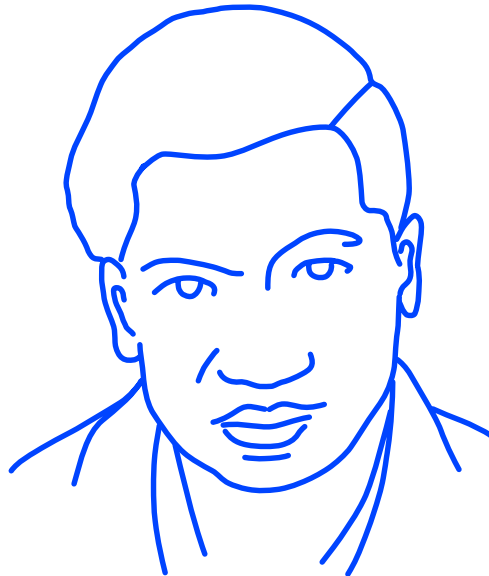
a	b	c	d
1	12	-10	9
1	12	-9	10
2	16	-15	9
2	16	-9	15
2	34	-33	15
2	34	-15	33
9	10	-12	1
9	10	-1	12
9	15	-16	2
9	15	-2	16
9	34	-33	16
9	34	-16	33
10	27	-24	19
10	27	-19	24

a	b	c	d
12	40	-33	31
12	40	-31	33
15	33	-34	2
15	33	-2	34
16	33	-34	9
16	33	-9	34
17	39	-36	26
17	39	-26	36
19	24	-27	10
19	24	-10	27
26	36	-39	17
26	36	-17	39
31	33	-40	12
31	33	-12	40

Wir sehen, dass sich etliche Lösungen bis auf Vorzeichenkombinationen und Anordnung wiederholen, so zum Beispiel:

a	b	c	d
1	12	-10	9
1	12	-9	10
9	10	-12	1
9	10	-1	12

Diese Lösung kann auch in der Form $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ geschrieben werden. Einer Anekdote zufolge soll Ramanujan gegenüber Hardy geäußert haben, die von Hardy als „nichtssagende Zahl“ bezeichnete Zahl 1729 sei die kleinste Zahl, welche als Summe von zwei Kuben geschrieben werden kann, eben $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.



Srinivasa Aiyangar Ramanujan, 1887 – 1920

Literatur

Harper, James, F.: Ramanujan, Quadratic Forms, and the Sum of three Cubes. Math. Mag. 86 (2013) 275-279. doi:10. 4169 / math.mag. 86. 4. 275. © Mathematical Association of America