Hans Walser, [20210920]

Summen von Potenzen

0 Worum geht es?

Die Gleichung

$$a^n + b^n = c^n \tag{1}$$

hat für $n = 2$ unendlich viele ganzzahlige Lösungen (pythagoreische Zahlentripel), hingegen für $n > 2$ keine (Fermat, Wiles).
Wir untersuchen ganzzahlige Lösungen der Gleichung:

$$a^n + b^n = c^n + d^n \tag{2}$$

Vorgehen mit brute force.

1 Quadrate

a	*b*	*c*	*d*	Summe
1	7	5	5	50
1	8	4	7	65
1	12	8	9	145
1	13	7	11	170
1	17	11	13	290
1	18	6	17	325
1	18	10	15	325
2	9	6	7	85
2	11	5	10	125
2	14	10	10	200
2	16	8	14	260
2	19	13	14	365
3	11	7	9	130
3	14	6	13	205

a	*b*	*c*	*d*	Summe
3	16	11	12	265
3	19	9	17	370
4	13	8	11	185
4	17	7	16	305
4	18	12	14	340
4	19	11	16	377
5	14	10	11	221
5	15	9	13	250
5	20	8	19	425
5	20	13	16	425
6	17	10	15	325
7	17	13	13	338
7	19	11	17	410
8	19	13	16	425

Tab. 1: Quadrate

Lesebeispiel:

$$1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65 \tag{3}$$

2 Kuben

a	b	c	d	Summe
1	12	9	10	1729
2	16	9	15	4104
2	24	18	20	13832
2	34	15	33	39312
3	36	27	30	46683
4	32	18	30	32832
9	34	16	33	40033
10	27	19	24	20683
12	40	31	33	65728
17	39	26	36	64232

Tab. 2: Kuben

Lesebeispiel:

$$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 = 1729 \tag{4}$$

Das Beispiel (4) soll Ramanujan gegenüber Hardy erwähnt haben. Die Abbildung 1 illustriert den Sachverhalt.

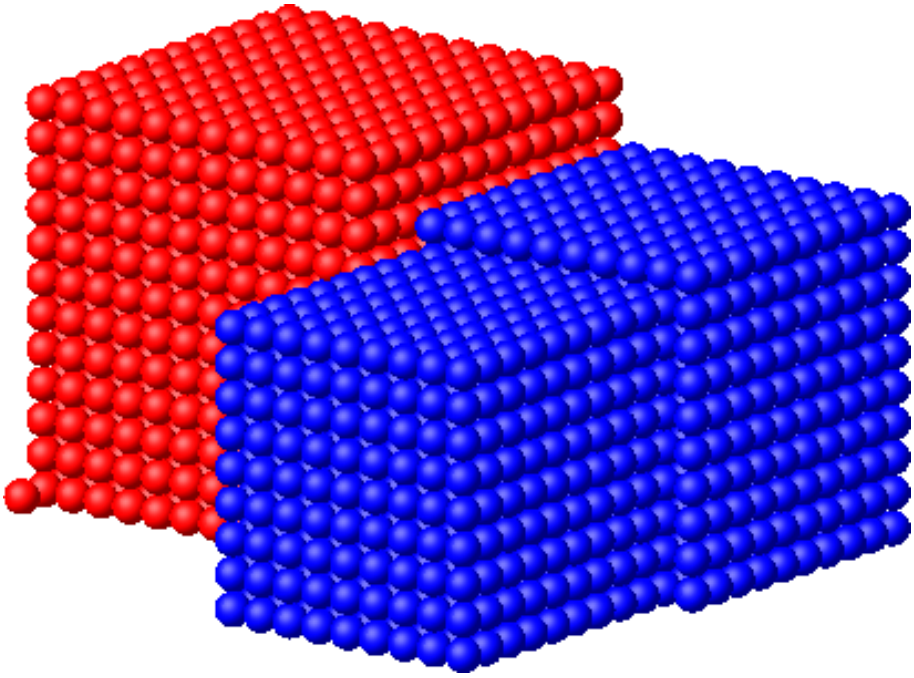

Abb. 1: $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 = 1729$

Die Abbildung 2 zeigt nur die Würfel.

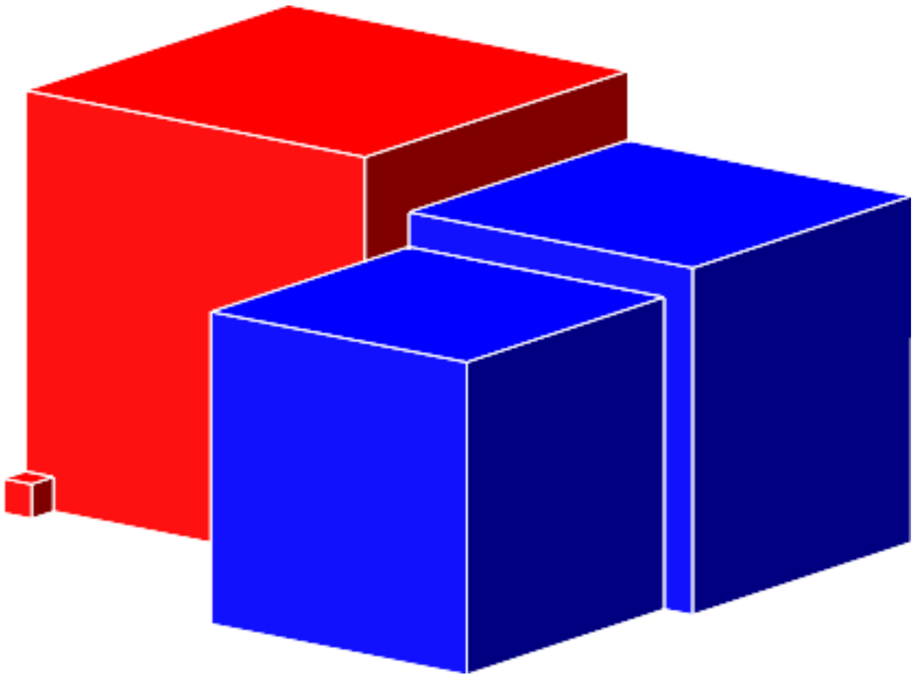

Abb. 2: Rot = blau

Die Abbildung 3 illustriert den Fall:

$$17^3 + 39^3 = 26^3 + 36 = 64232 \tag{5}$$

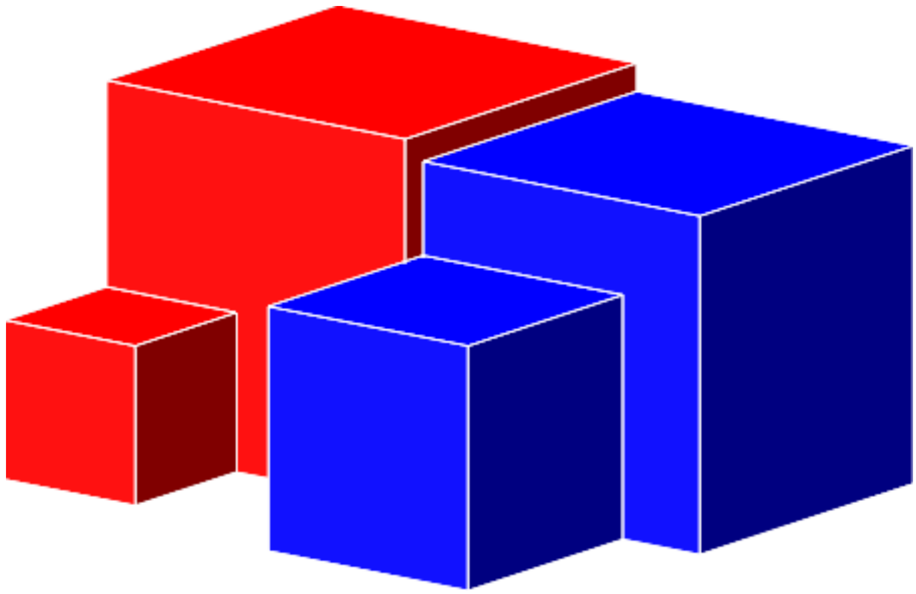

Abb. 3: Rot = blau

3 Vierte Potenzen

Es ist:

$$59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4 = 635318657 \tag{5}$$

Für weitere Lösungen stieß ich an die Kapazitätsgrenzen meines Computers. Analog für höhere Potenzen.