Hans Walser, [20121227]

Symmetrische Matrix

1 Die Matrix

Wir arbeiten mit der symmetrischen Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Eine *symmetrische* Matrix ist gleich ihrer transponierten Matrix: $A^t = A$

2 Die Abbildung

2.1 Verzerrungsellipse

Wir verwenden die Matrix A als Abbildungsmatrix und bilden den Einheitskreis ab.

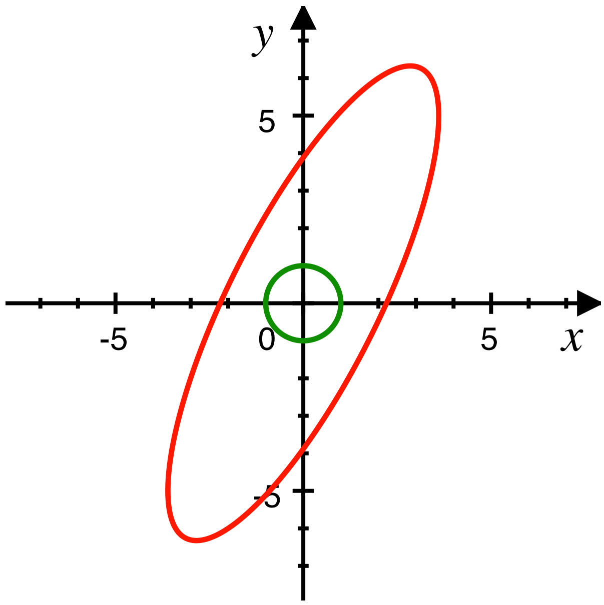
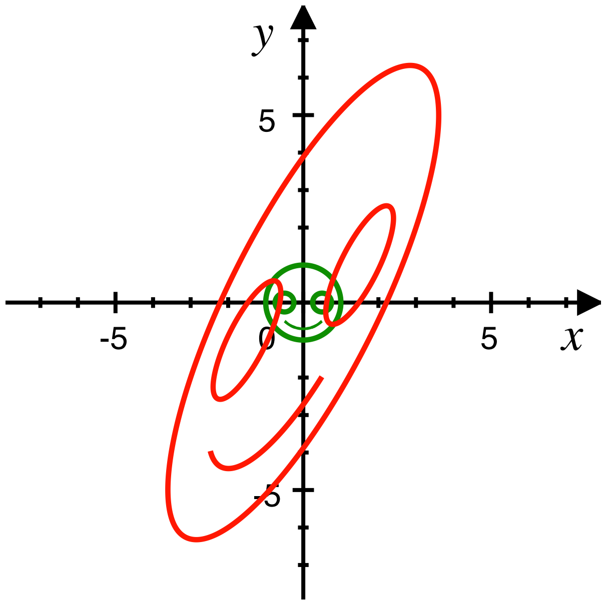


Bild des Einheitskreises

Der Kreis wird zu einer schrägen Ellipse verzerrt.

Wir sehen etwas mehr, wenn wir den Einheitskreis durch den Smiley ersetzen.



Smiley

2.2 Parameterdarstellung der Verzerrungsellipse

Der Einheitskreis hat die Parameterdarstellung:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

Nun multiplizieren wir mit der Matrix A:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos(t)+2\sin(t) \\ 2\cos(t)+6\sin(t) \end{bmatrix}$$

Rechts haben wir die Parameterdarstellung der Verzerrungsellipse.
Beim Smiley müssen die Augen und der Mund entsprechend bearbeitet werden.

2.3 Implizite Gleichung der Verzerrungsellipse

Wir müssen mit der inversen Matrix A^{-1} arbeiten:

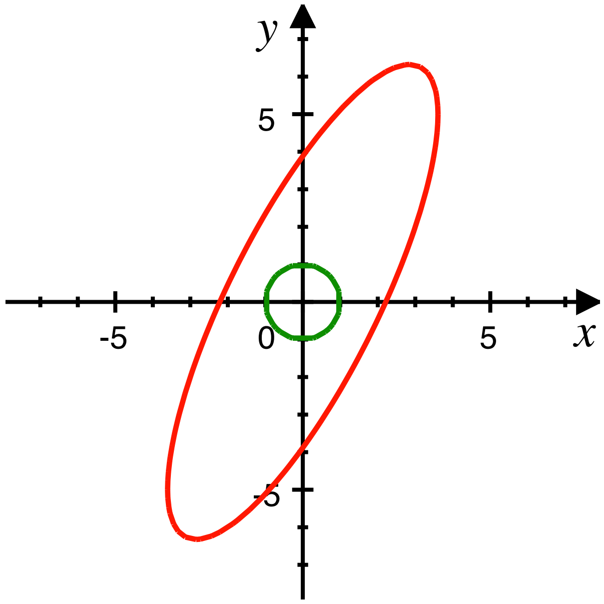
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} \\ -\frac{2}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$$

Nun setzen wir die Norm von $\left| A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right| = 1$, also:

$$\left(A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)^2 = \left(\begin{bmatrix} \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} \\ -\frac{2}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)^2 = \frac{1}{196}\begin{bmatrix} 6x-2y \\ -2x+3y \end{bmatrix}^2 = \frac{1}{196}\left(40x^2 - 36xy + 13y^2\right) = 1$$

Die Idee ist, dass die Rückabbildung in den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ passt.

Die Abbildung zeigt die Situation in dieser impliziten Darstellung. Fürs Auge natürlich kein Unterschied zur obigen Parameterdarstellung.



Implizite Darstellung

3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir bestimmen die Eigenwerte und Eigenvektoren der symmetrischen Matrix *A*: Wir erhalten die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$ mit den beiden Lösungen $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = 2$. Dies sind die Eigenwerte der Matrix *A*. Für die Eigenvektoren erhalten wir zum Beispiel:

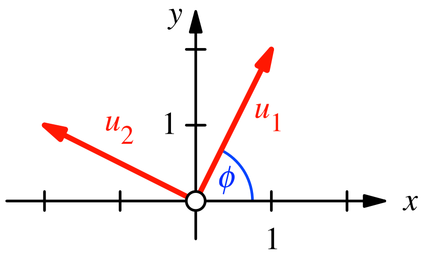
$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ und } u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die beiden Eigenvektoren sind orthogonal.

Allgemein gilt (ohne Beweis):

Eine symmetrische Matrix hat orthogonale Eigenvektoren.

Die Abbildung zeigt die beiden Eigenvektoren.



Eigenvektoren

Wir vermuten, dass der Eigenvektor u_1 die Richtung der langen Hauptachse (lange Symmetrieachse) der obigen Verzerrungsellipse hat. Der Eigenvektor u_2 hat die Richtung der kurzen Hauptachse (kurze Symmetrieachse) der Verzerrungsellipse.
Für den eingezeichneten Winkel ϕ ergibt sich:

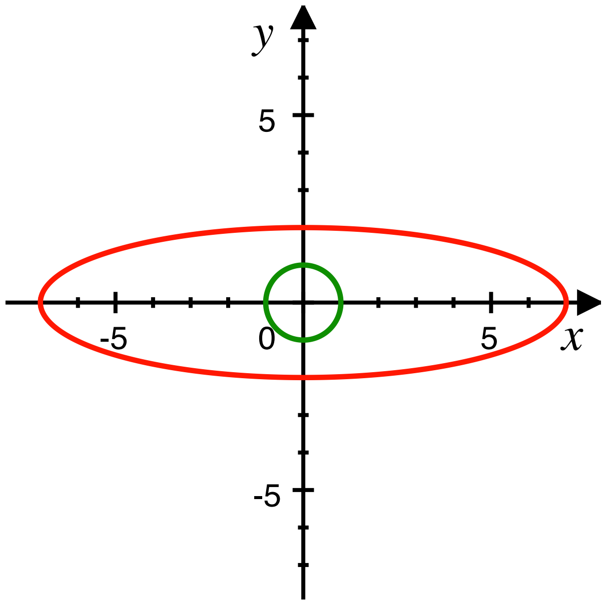
$$\cos(\phi) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin(\phi) = \tfrac{4}{\sqrt{5}}, \quad \phi = \arccos\left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63.43°$$

4 Eine Diagonalmatrix

Die Matrix

$$A' = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

enthält die Eigenwerte der Matrix A in der Diagonalen und sonst nichts. Die zugehörige Abbildung ist eine Streckung in der x-Richtung um den Faktor 7 und in der y-Richtung um den Faktor 2. Der Einheitskreis wird zu einer Ellipse mit den Hauptachsen 7 und 2 verzerrt.



Verzerrung

Das ist offenbar wieder unsere Verzerrungsellipse, aber um den Winkel ϕ zurückgedreht.

5 Noch eine Matrix

5.1 Eine Drehmatrix

Die Drehmatrix T für den Winkel ϕ ist:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Diese Matrix hat folgende Eigenschaften:

Die Spaltenvektoren sind zueinander orthogonal.

Die Spaltenvektoren haben die Länge 1.

Die Spaltenvektoren (und ebenso die Zeilenvektoren) bilden also eine orthonormale Basis.

Es ist:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = T^t$$

Eine Matrix mit diesen Eigenschaften wird als *orthogonale Matrix* bezeichnet.

5.2 Orthogonale Matrix

Quadratische Matrix Q mit folgenden Eigenschaften:

Die Spaltenvektoren sind zueinander orthogonal.

Die Spaltenvektoren haben die Länge 1.

Es ist $Q^t = Q^{-1}$.

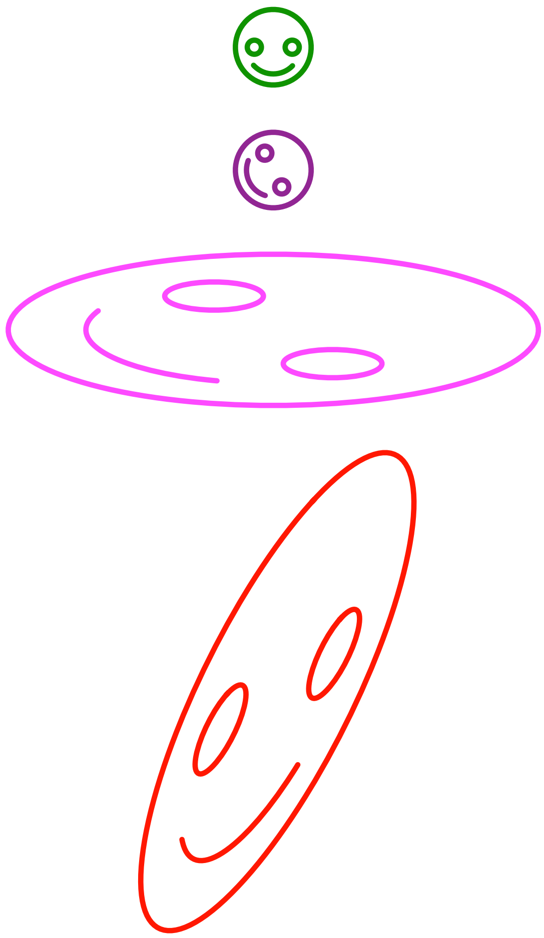
Wir deine orthogonale Matrix als Abbildungsmatrix verwendet, bleiben Längen und Winkel invariant. Die Abbildung ist also eine Kongruenzabbildung. Die Abbildung ist eine Drehung oder eine Spiegelung.

Der entsprechende Begriff bei komplexen Matrizen ist die *unitäre Matrix*.

6 Zusammensetzung von Abbildungen

Wir machen nun folgendes: Wir drehen den Smiley um den Winkel ϕ zurück, dann verzerren wir mit der Matrix A', also in der x-Richtung mit dem Faktor 7 und in der y-Richtung mit dem Faktor 2, und dann drehen wir um den Winkel ϕ vorwärts. Dann sollten wir dasselbe erhalten wie bei der Direktabbildung mit der Matrix A.

Die Figurenfolge zeigt, dass es klappt.



Zusammensetzung von Abbildungen

Wir sehen, dass der erste Schritt, also das Zurückdrehen des Smileys um den Winkel ϕ, wesentlich ist und nicht übersprungen werden kann.

7 Vorgehen mit Matrizen

Dem Zusammensetzen von Abbildungen entspricht die Multiplikation von Matrizen. Gemäß unseren Überlegungen muss gelten:

$$T\ A'T^{-1} = A$$

Kontrolle:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{5}} & \frac{14}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{5} & \frac{10}{5} \\ \frac{10}{5} & \frac{30}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Die Sache ist also ok.
Umgekehrt gilt auch:

$$A' = T^{-1} A T$$

Eine symmetrische Matrix kann also „diagonalisiert“ werden. In der Diagonalen stehen dann die Eigenwerte der Matrix.