Hans Walser, [20150838]

Tangentensiebeneck

1 Worum geht es?

Zu gegebenen sieben Seitenlängen $a_1,...,a_7$ kann ein Tangentensiebeneck konstruiert werden. Die notwendige Rechnung benötigt allerdings CAS.

Das Vorgehen kann auf beliebige Tangentenvielecke ungerader Eckenzahl übertragen werden.

2 Einige Rechnungen

Die Abbildung 1 zeigt die verwendeten Bezeichnungen.

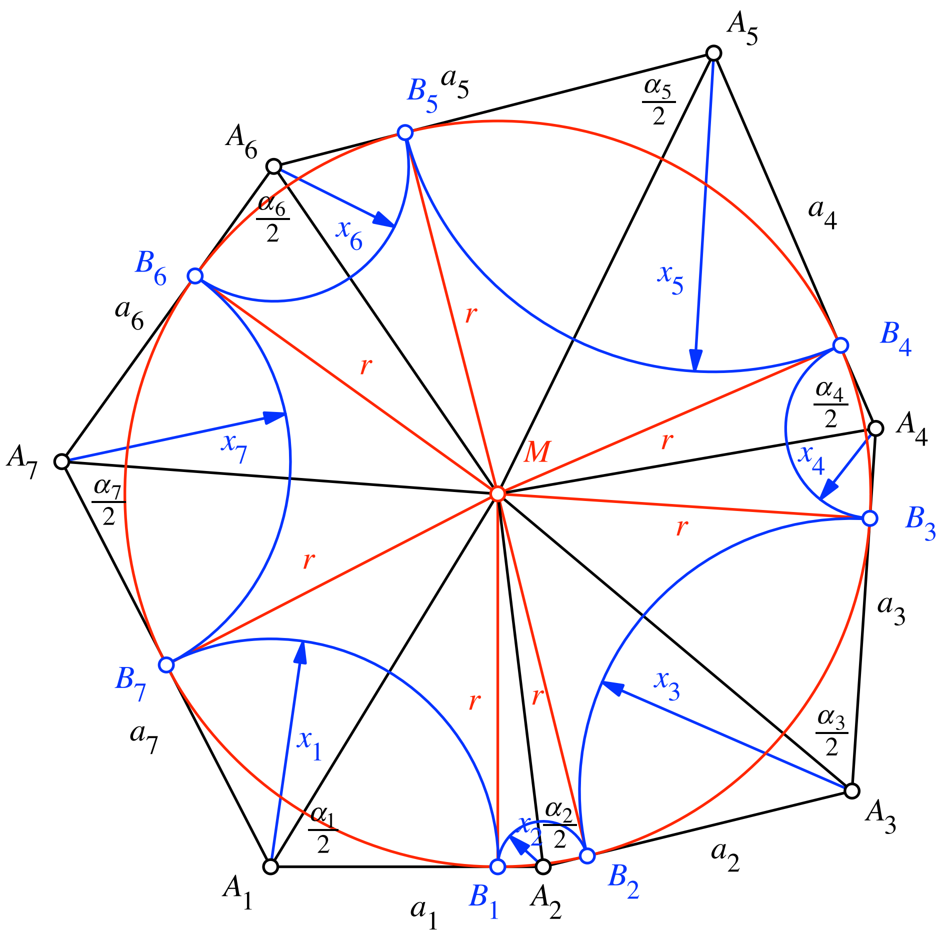

Abb. 1: Bezeichnungen

Es ist mit zyklischer Indizierung:

$$x_i = \overline{A_i B_i} = \overline{A_i B_{i-1}} \tag{1}$$

Für die Berechnung der x_i haben wir das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llll} x_1 + x_2 = a_1, & x_2 + x_3 = a_2, & x_3 + x_4 = a_3, & x_4 + x_5 = a_4, \\ x_5 + x_6 = a_5, & x_6 + x_7 = a_6, & x_7 + x_1 = a_7 & \end{array} \tag{2}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Koeffizientenmatrix C:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(C) = 2 \tag{3}$$

Man beachte, dass die analoge Matrix mit einer geraden Spalten- und Zeilenzahl singulär ist.

Mit der Schreibweise (halber Umfang, s)

$$s = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{7} a_i, \quad i = 1,\ldots,7 \tag{4}$$

folgt aus (2):

$$x_i = s - a_{i+1} - a_{i+3} - a_{i+5} \tag{5}$$

Damit können wir auf jeder Seite a_i die Position des Berührungspunktes B_i des Inkreises bestimmen. Interessant wird die Situation, wenn einzelne x_1-Werte negativ werden.

Fehlt noch der Inkreisradius r. Dazu folgende Überlegung. Das Siebeneck hat die Innenwinkelsumme:

$$\sum_{i=1}^{7} \alpha_i = (7-2)\pi \tag{6}$$

Aus

$$\frac{\alpha_i}{2} = \arctan\left(\frac{r}{x_i}\right), \quad i = 1,...,7 \tag{7}$$

erhalten wir daher die Gleichung für den Inkreisradius r:

$$\sum_{i=1}^{7} \arctan\left(\frac{r}{x_i}\right) = \frac{5}{2}\pi \tag{8}$$

Wir lösen (8) mit CAS nach r auf. Eine allgemeine Formel ist leider viel zu lang, wir arbeiten daher mit numerischen Daten:

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 8, \quad a_4 = 9, \quad a_5 = 10, \quad a_6 = 8, \quad a_7 = 10 \tag{9}$$

Maple liefert:

```
restart:
n:=7: # Eckenzahl
a[1]:=6: a[2]:=7: a[3]:=8: a[4]:=9: a[5]:=10: a[6]:=8: a[7]:=10:
for i from n+1 to 2*n do
 a[i]:=a[i-7]:
end:
s:=1/2*sum(a[j], j=1..n):
for i from 1 to n do
 x[i]:=s-a[i+1]-a[i+3]-a[i+5]:
end:
glg:=sum(arctan(r/x[j]), j=1..7)=5/2*Pi;
r:=solve(glg, r);
r:=evalf(r);
```

$$glg := 2\arctan\left(\frac{1}{5}r\right) + \arctan(r) + \arctan\left(\frac{1}{6}r\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}r\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}r\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}r\right) = \frac{5}{2}\pi$$

$$r := \frac{1}{87}\sqrt{87\left(6045313085 + 1044\,\mathrm{I}\sqrt{3000256948443}\right)^{1/3} + \frac{297078639}{\left(6045313085 + 1044\,\mathrm{I}\sqrt{3000256948443}\right)^{1/3}} + 190182}$$

$$r := 8.210203379 - 2.413786412\ 10^{-10}\ \mathrm{I}$$

Abb. 2: Berechnung

Für die Berechnung von r werden auch kubische Wuzeln benötigt. Wir erhalten numerisch ein komplexes Resultat, aber das ist wohl, weil das System am Anschlag ist oder ich nicht optimal programmiert habe. Der Imaginärteil dürfte null sein. Somit haben wir für den Inkreisradius r:

$$r \approx 8.2102033 \tag{10}$$

3 Die Zeichnung

Die Zeichnung entspricht den Daten (9). Wir beginnen mit a_1, x_1 und r gemäß Abbildung 3.

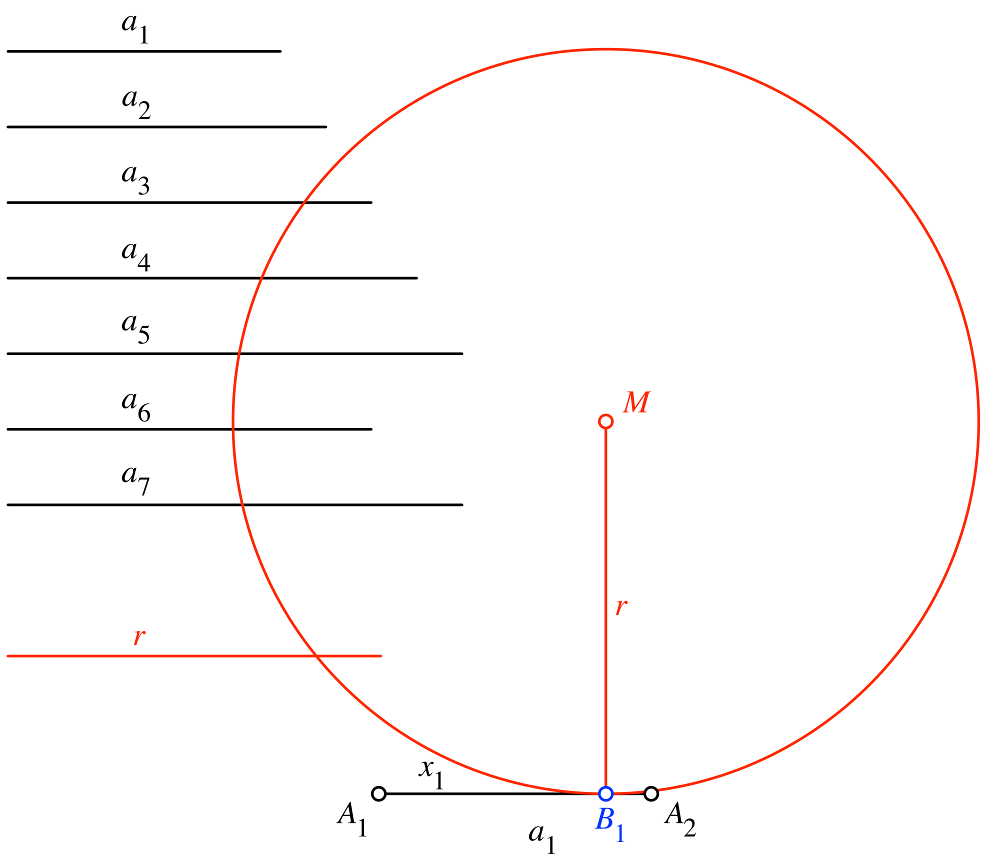

Abb. 3: Start

Anschließend können wir die weiteren Seiten tangential anlegen, bis sich die Figur schließt (Abb. 4).

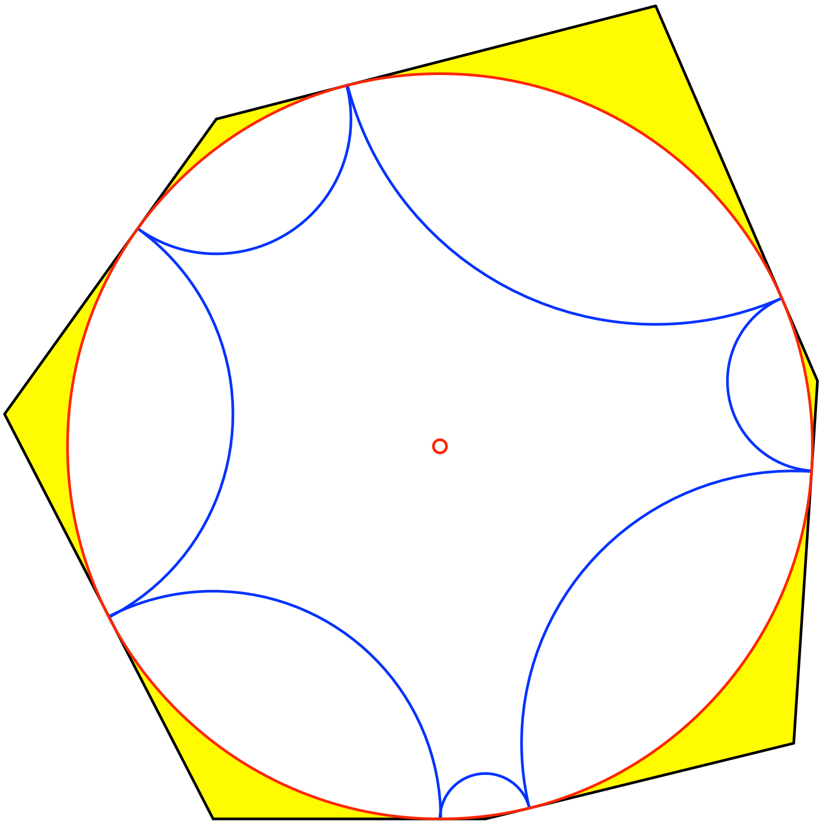

Abb. 4: Tangentensiebeneck

4 Über regelmäßige Siebenecke und Siebensterne

Die Abbildung 5 zeigt ein regelmäßiges Siebeneck und davon abgeleitete Sterne gleicher Seitenlänge.

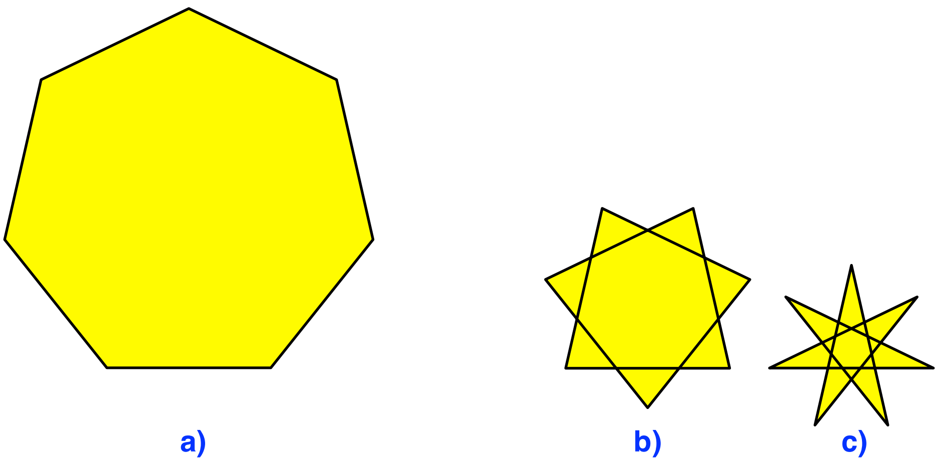

Abb. 5: Sterne

In der Abbildung 5c erkennen wir zuinnerst ein Siebeneck der Abbildung 5a und zuzweitinnerst einen Stern der Abbildung 5b.

Das regelmäßige Siebeneck der Abbildung 5a wird gelegentlich mit $\{7\}$ notiert, für den Stern der Abbildung 5b ist die Notation $\left\{\frac{7}{2}\right\}$ gebräuchlich und für den Stern der Abbildung 5c die Bezeichnung $\left\{\frac{7}{3}\right\}$. Man kann sich überlegen, wie $\left\{\frac{7}{4}\right\}$ und $\left\{\frac{7}{5}\right\}$ aussehen und was $\left\{\frac{7}{1}\right\}$ oder $\left\{\frac{7}{6}\right\}$ bedeutet.

Die Innenwinkelsumme für $\left\{\frac{7}{2}\right\}$ ist 3π und für $\left\{\frac{7}{3}\right\}$ nur noch π. Wenn wir in der Gleichung (8) diese Werte einsetzen, erhalten wir den Inkreisradius für die entsprechenden Sterne.

Mit den Daten (9) erhalten wir beim Stern $\left\{\frac{7}{2}\right\}$ den Inkreisradius:

$$r \approx 2.746763396 \tag{11}$$

Die Abbildung 6 zeigt den zugehörigen Stern. Da die Seitenlängen (8) unregelmäßig sind, ist dies auch der Stern.

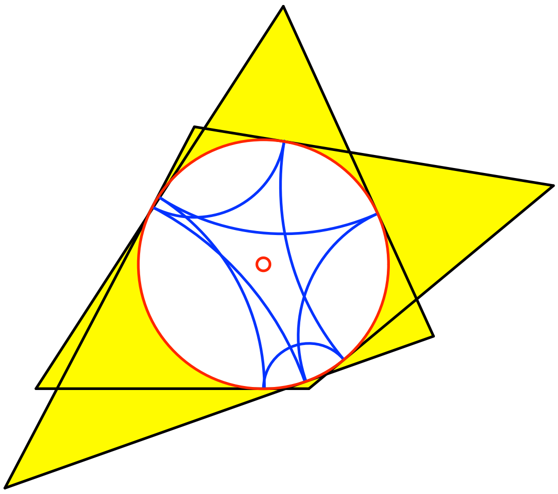

Abb. 6: Stern

Mit den Daten (9) erhalten wir beim Stern $\left\{\frac{7}{3}\right\}$ den Inkreisradius:

$$r \approx 0.6535760219 \tag{12}$$

Die Abbildung 7 zeigt den zugehörigen Stern.

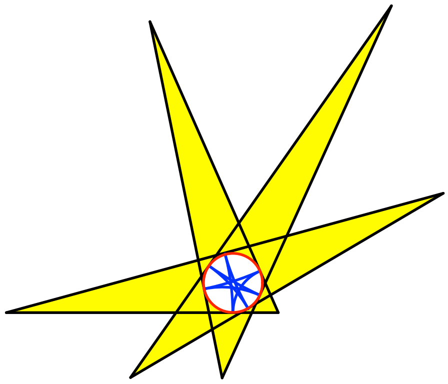

Abb. 7: Zweiter Stern

5 Ausblick

Das Verfahren lässt sich auf Tangentenvielecke mit ungerader Eckenzahl n verallgemeinern. Die Anzahl der verschiedenen Sterne ist $\frac{n-3}{2}$. Zum Dreieck gehört kein Stern, zum Fünfeck einer (Pentagramm), zum Siebeneck zwei, zum Neuneck drei.
Die Abbildung 8 zeigt ein Beispiel zum Tangentenneuneck.

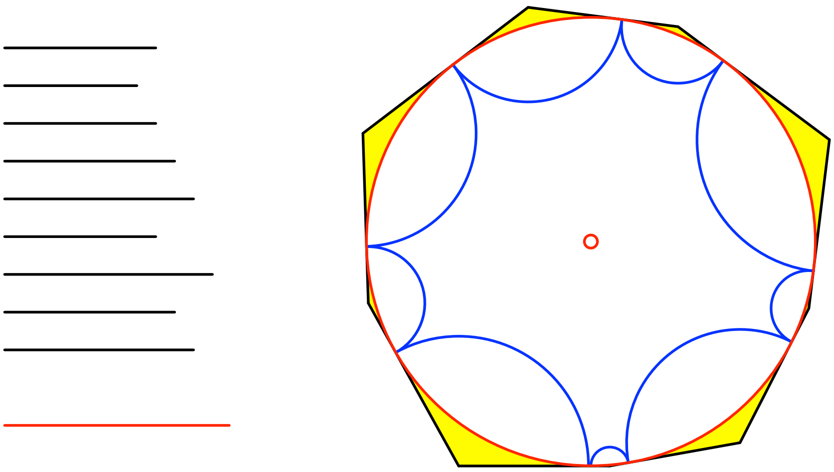

Abb. 8: Tangentenneuneck

Die Abbildung 9 gibt die drei zugehörigen Sterne. Die Sterne sind so ausgerichtet, dass die horizontalen Seiten a_1 auf einer Geraden liegen.

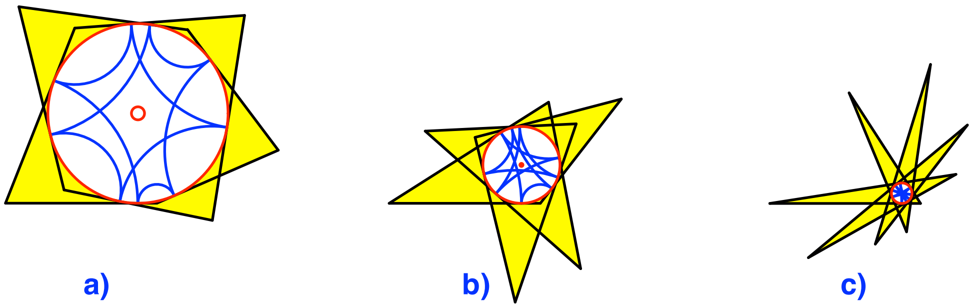

Abb. 9: Sterne