Hans Walser, [20180224]

# Teilbarkeit durch 3

## 1 Worum es geht

Visueller Beweis.

## 2 Aussage

Die Zahl $2^{2n}-1$ ist durch 3 teilbar.

Beispiele:

| $n$ | $2^{2n}-1$ | Zerlegung |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 3*0 |
| 1 | 3 | 3*1 |
| 2 | 15 | 3*5 |
| 3 | 63 | 3*21 |
| 4 | 255 | 3*85 |
| 5 | 1023 | 3*341 |

**Tab. 1: Beispiele**

## 3 Induktiver Beweis

Verankerung siehe Tabelle 1.

Induktionsschritt. Sei $2^{2n}-1$ durch 3 teilbar.

Es ist:

$$\left(2^{2(n+1)}-1\right)-\left(2^{2n}-1\right)=2^{2n+2}-2^{2n}=2^{2n}\left(2^2-1\right)=3\cdot 2^{2n} \qquad (1)$$

Damit ist auch $2^{2(n+1)}-1$ durch 3 teilbar.

Bemerkung: Analog kann gezeigt werden, dass $2^{2n-1}+1$ durch 3 teilbar ist.

## 4 Visueller Beweis

Wir arbeiten mit einem gleichseitigen Dreieck und unterteilen seine Seiten durch fortlaufendes Halbieren in $2^n$ Teile. Damit können wir das Dreieck in $\left(2^n\right)^2=2^{2n}$ Dreiecke unterteilen (Abb. 1).

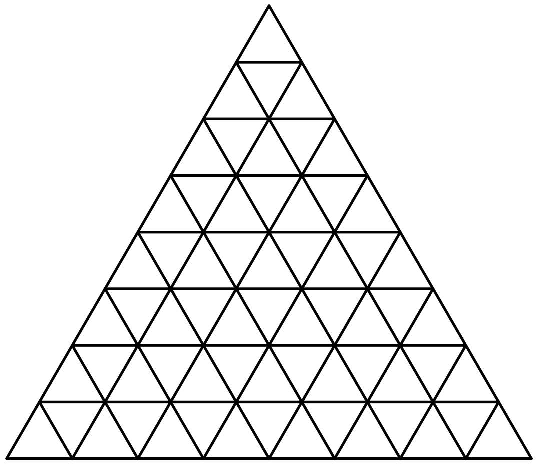

**Abb. 1: Unterteilung**

Wenn wir uns bei der Unterteilung auf das mittelste Dreieck beschränken, sehen wir, dass der Mittelpunkt (Schwerpunkt) des Dreiecks stets im Inneren eines Teildreiecks liegt (Abb. 2).

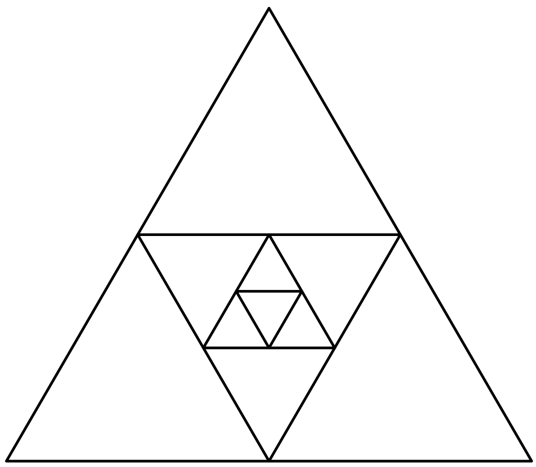

**Abb. 2: Mittelpunkt im Inneren eines Teildreiecks**

Dieses den Mittelpunkt des Startdreiecks enthaltende Teildreieck färben wir schwarz. Durch Verlängerung der Seiten des schwarzen Teildreiecks können wir aus Symmetriegründen das Startdreieck in drei kongruente Teile unterteilen, welche alle eine ganze Anzahl von Teildreiecken enthalten (Abb. 3).

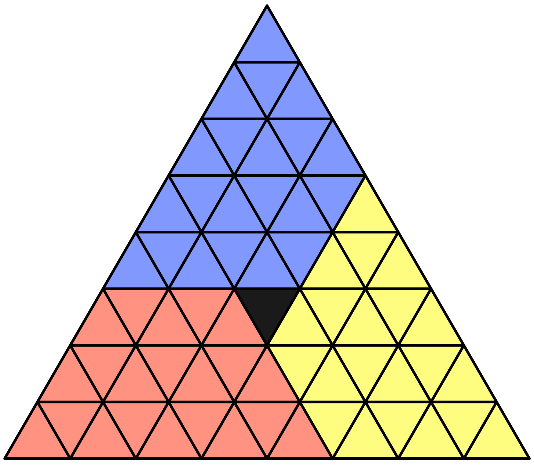

**Abb. 3: Dreiteilige Drehsymmetrie**

Damit ist die Aussage bewiesen.

Bemerkung: Ich habe es nicht geschafft, analog visuell zu zeigen, dass $2^{2n-1}+1$ durch 3 teilbar ist.