Hans Walser, [20220703]

Tetraeder in Halbkugel

1 Worum geht es?

Analogie eines ebenen Problems im Raum. Datenaufnahme.

2 In der Ebene

Das rechtwinklig gleichschenklige Dreieck ist das flächenmäßige größte Dreieck, das einem Halbkreis einbeschrieben werden kann (Abb. 1).

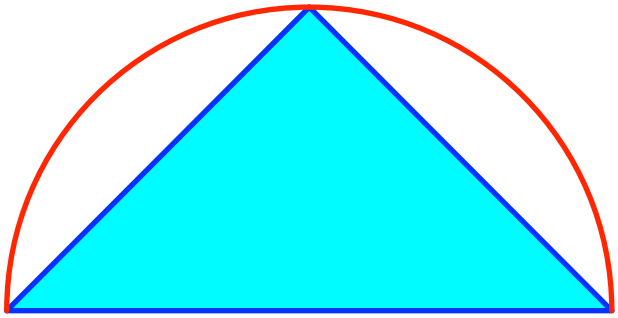

Abb. 1: Größtes Dreieck im Halbkreis

Begründung: Bei jedem anderen Dreieck sind sowohl Grundlinie wie auch zugehörige Höhe kleiner.

Bei einem Radius $r = 1$ ist die Dreiecksfläche ebenfalls 1.

Der Halbkreis wird manchmal als *Thaleskreis* bezeichnet.

3 Problemstellung

Analogie im Raum: Welches ist das größte Tetraeder, das einer Halbkugel einbeschrieben werden kann?

Für die Daten setzen wir den Halbkugelradius 1.

4 Die Lösung

Die Abbildung 2 zeigt das Tetraeder in einer schrägen Ansicht.

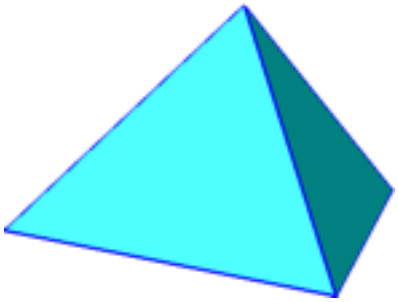

Abb. 2: Das Tetraeder

Die Abbildung 3 zeigt das Tetraeder von oben (Grundriss), von vorne (Aufriss) und von der Seite (Seitenriss) in der klassischen Anordnung.

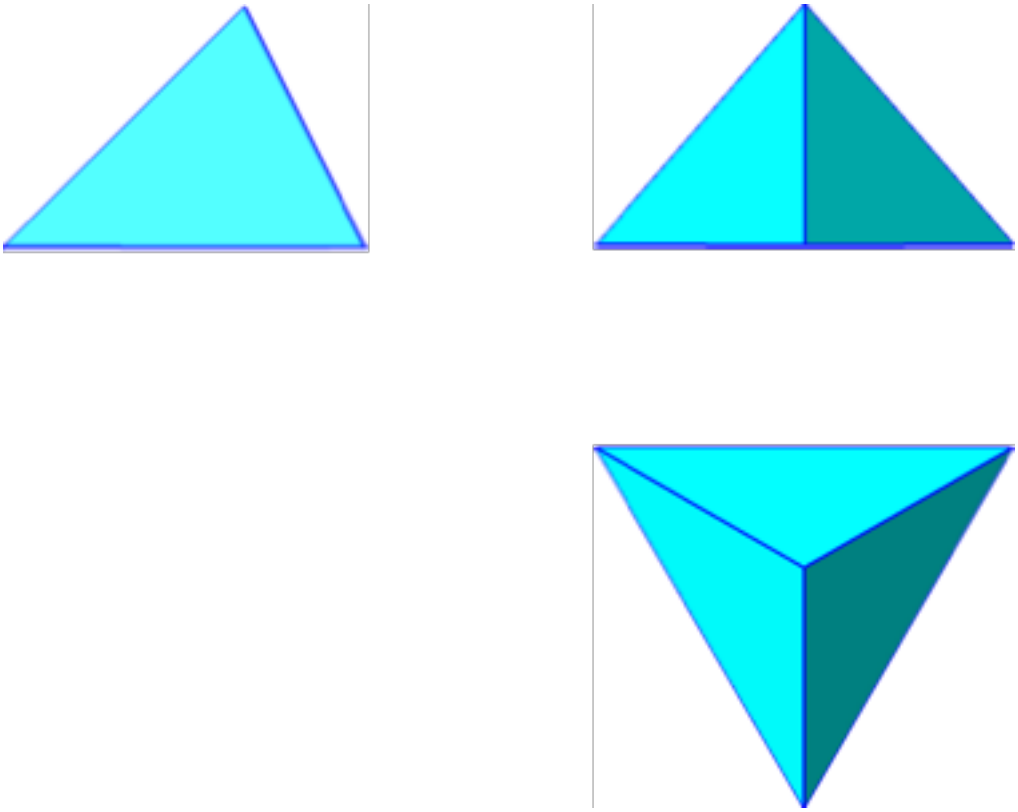

Abb. 3: Risse

5 In der Halbkugel

Die Abbildungen 4 und 5 zeigen das Tetraeder in der Halbkugel.

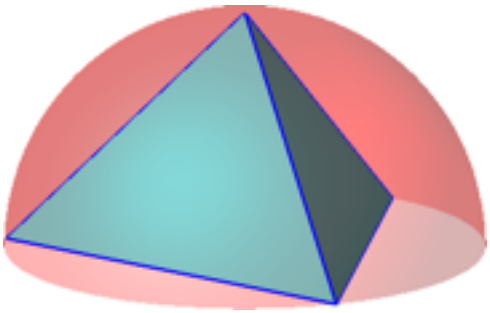

Abb. 4: Tetraeder in der Halbkugel

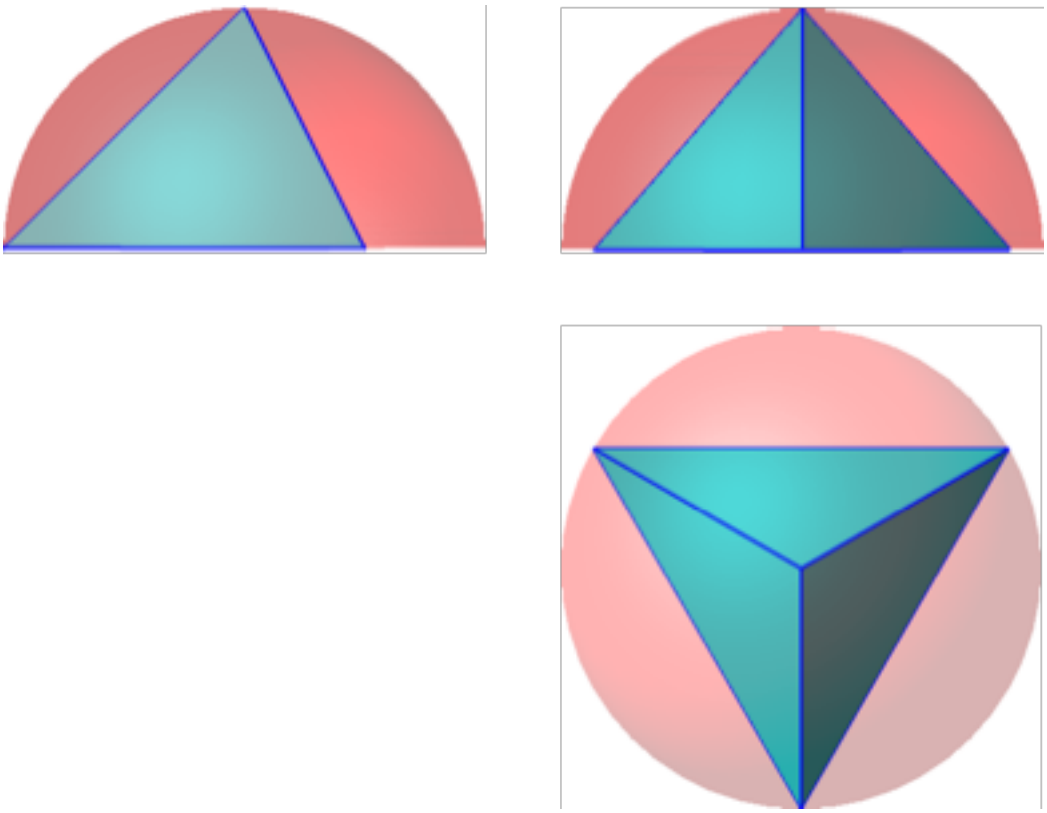

Abb. 5: Risse

6 Beschreibung

6.1 Längen

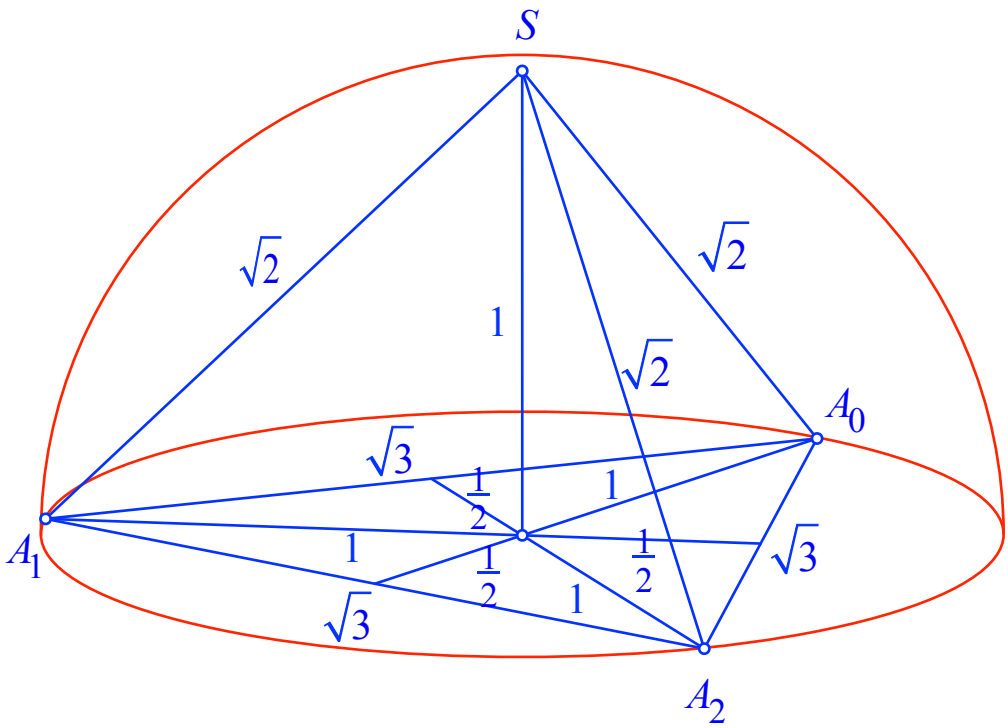

Abb. 6: Längen

Die Eckpunkte haben die Koordinaten:

$$A_i = \left(\cos\left(i\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(i\frac{2\pi}{3}\right), 0\right), \qquad i = 0, 1, 2$$

$$S = (0,0,1)$$

Das Bodendreieck $A_0A_1A_2$ ist gleichseitig und hat die Höhe 3/2.

Die Abbildung 7 zeigt die Höhen der gleichschenkligen Seitendreiecke.

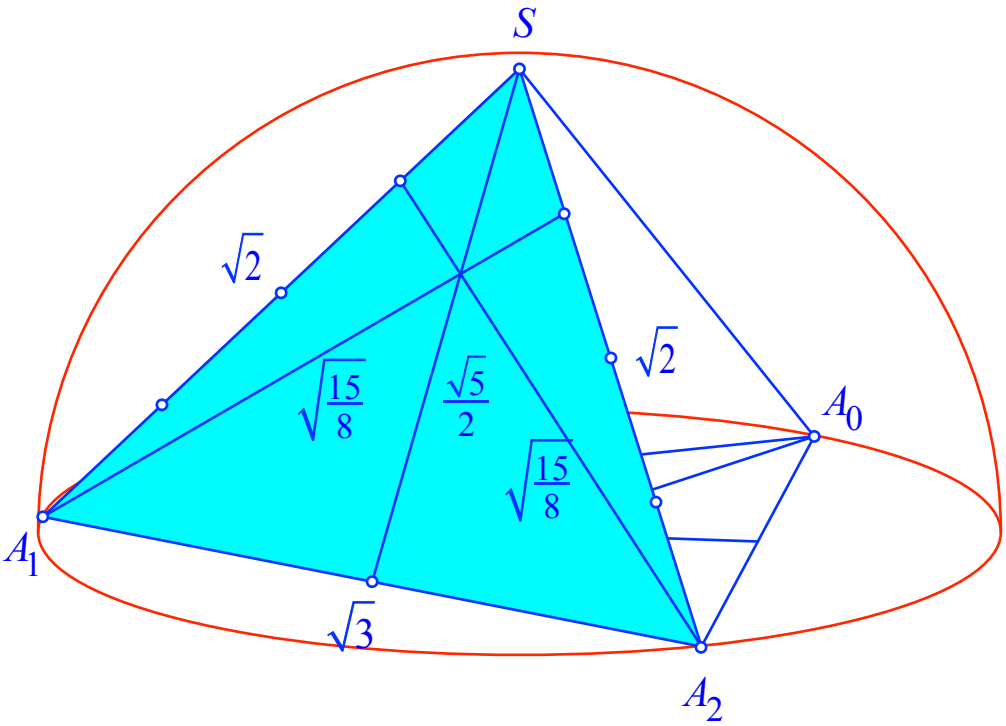

Abb. 7: Höhen der Seitendreiecke

6.2 Winkel

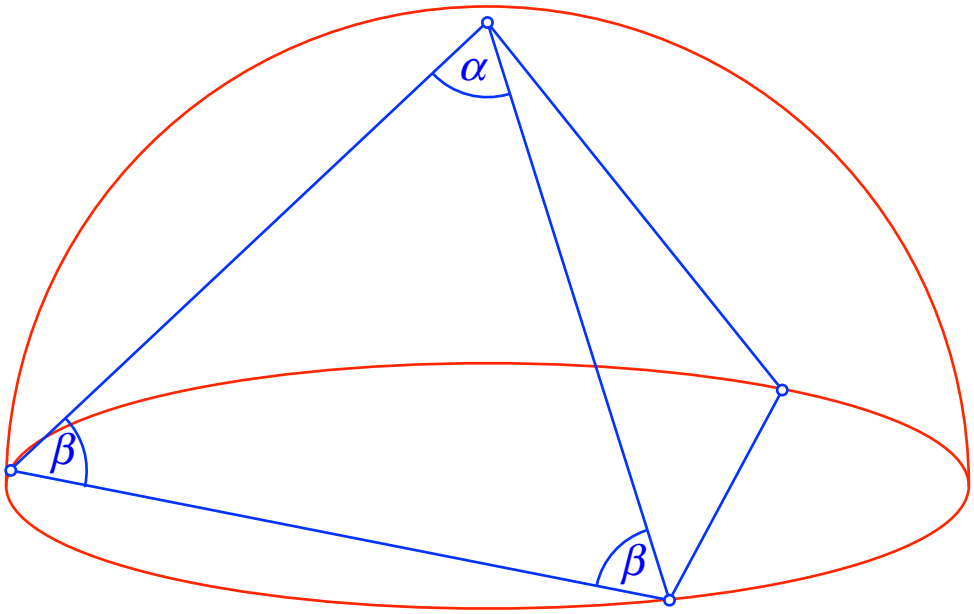

Abb. 8: Winkel der Seitendreiecke

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \arctan\left(\sqrt{15}\right) \approx 75.5225°$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) \approx 52.2388°$$

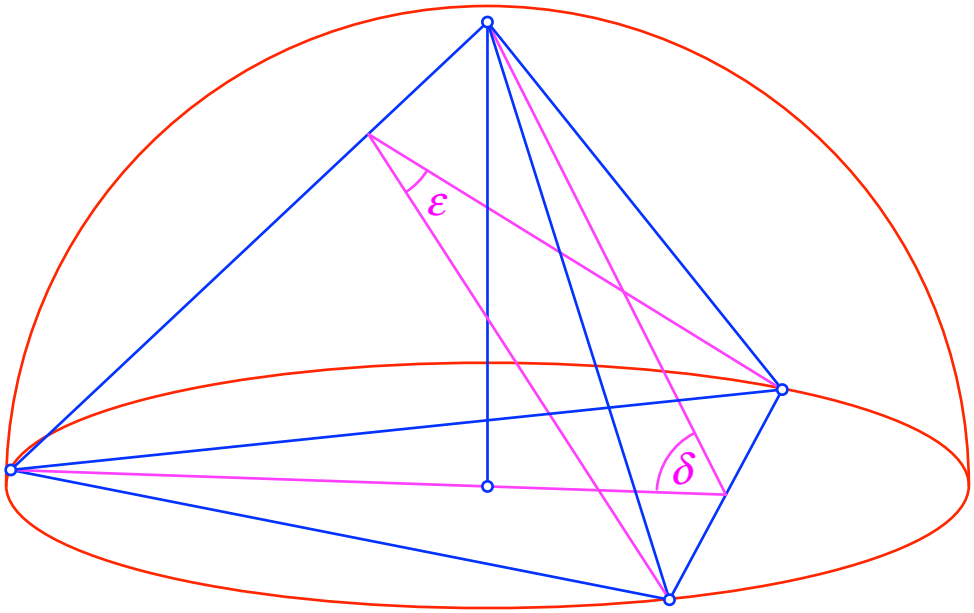

Abb. 9: Diederwinkel

$$\delta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \arctan(2) \approx 63.4349°$$

Dieser Winkel ist gleich dem Diagonalenschnittwinkel im goldenen Rechteck.

$$\varepsilon = \arccos\left(\frac{1}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = \arctan\left(2\sqrt{6}\right) \approx 78.4630°$$

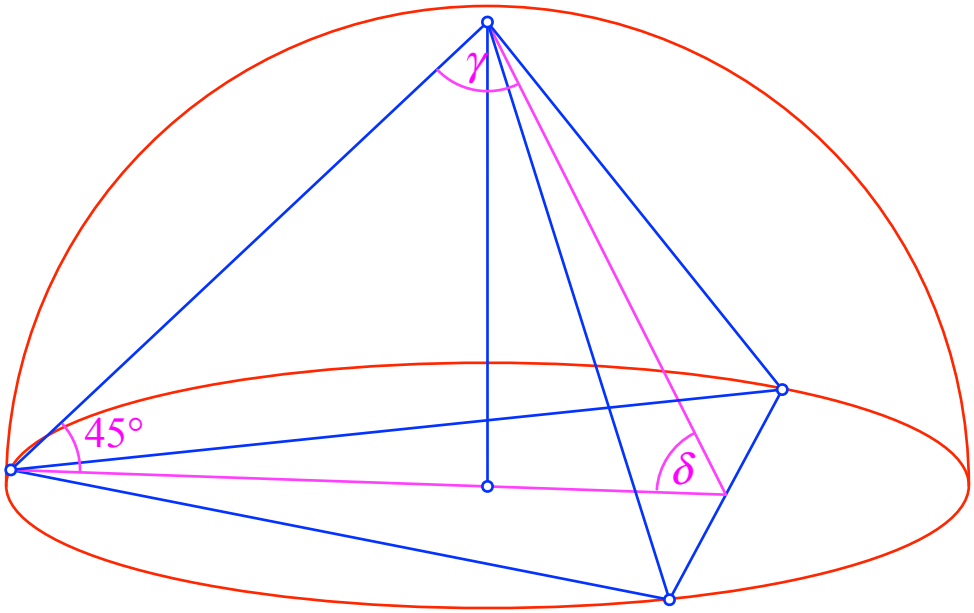

Abb. 10: Weitere Winkel

$$\gamma = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan(3) \approx 71.5651°$$

Diese letzte Beziehung kann leicht im Quadratraster eingesehen werden (Abb. 11).

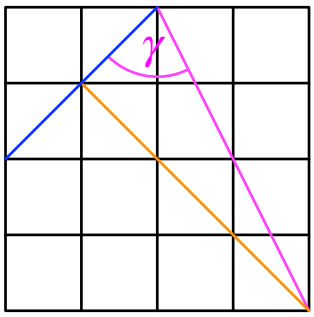

Abb. 11: Proof without words

Literatur

Alsina, Claudi & Nelsen, Roger B. (2013): Bezaubernde Beweise: eine Reise durch die Eleganz der Mathematik. Berlin: Springer Spektrum.

Nelsen, Roger B. (2000): Proofs without Words. MAA, The Mathematical Association of America. ISBN 978-0883857007