Hans Walser, [20130502]

Transformation

1 Worum es geht

Die Grundidee ist, die geometrischen Begriffe Punkt und Gerade so zu ersetzen, dass die Tätigkeiten *Verbinden* und *Schneiden* vertauscht werden.

2 Die Transformationen

2.1 Der Hauptpunkt

Wir wählen einen „Hauptpunkt“ O, der in den folgenden Konstruktionen eine zentrale Rolle spielt.

2.2 Kreis statt Punkt

Wir ersetzen einen beliebigen Punkt P (Abb. 1a) durch den Thaleskreis p über der Strecke OP (Abb. 1c). Wir transformieren also den Punkt P in den Kreis p.

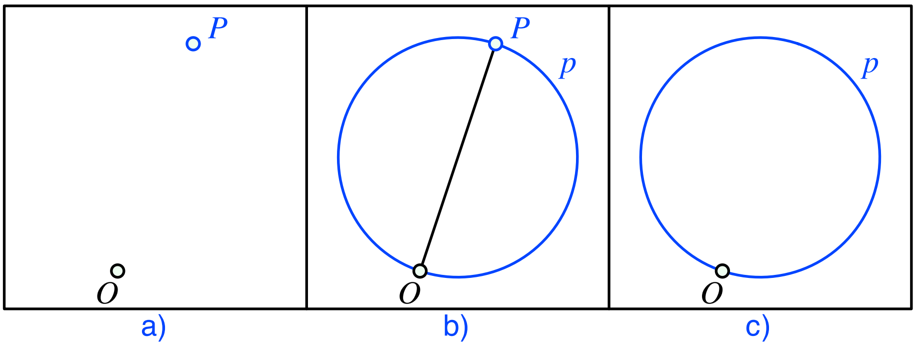

Abb. 1: Ersetzen eines Punktes

2.3 Punkt statt Gerade

Wir ersetzen eine beliebige Gerade g (Abb. 2a) durch den Lotfußpunkt G des Lotes von O auf g (Abb. 2c). Wir transformieren die Gerade g in den Punkt G.

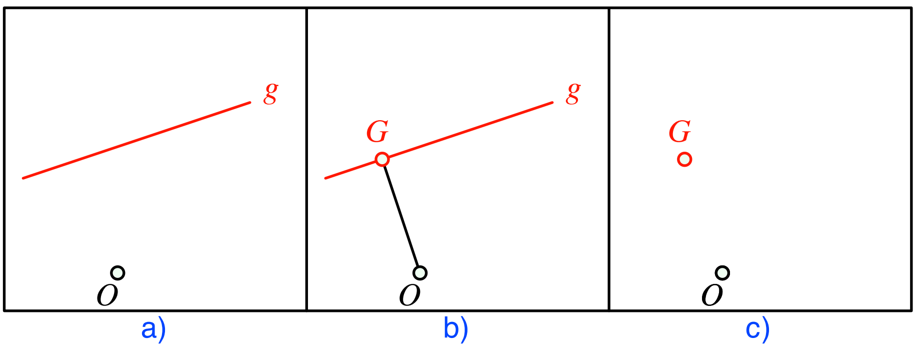

Abb. 2: Ersetzen einer Geraden

3 Verbinden und Schneiden

3.1 Verbinden zweier Punkte

Wir verbinden die beiden Punkte P und Q mit der Geraden g. Dazu schneiden wir die beiden zugeordneten Thaleskreise p und q (Abb. 3a). Der eine Schnittpunkt ist O. Der andere Schnittpunkt G ist der zugeordnete Punkt der Verbindungsgeraden g (Abb. 3b).

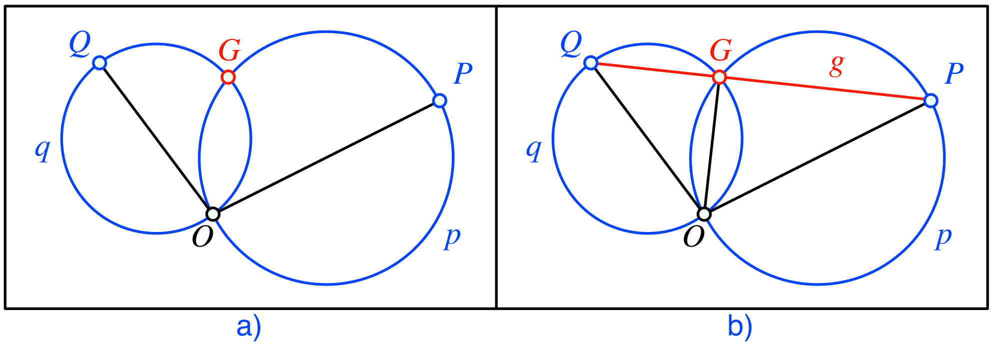

Abb. 3: Verbinden

Der Beweis ergibt sich aus Eigenschaften des Thaleskreises.

3.2 Schneiden zweier Geraden

Wir zeichnen den Schnittpunk S der beiden Geraden g und h (Abb. 4a). Dazu zeichnen wir den Umkreis s des Dreieckes OGH, wobei G und H die beiden den Geraden g und h zugeordneten Punkte sind. Der Kreis s ist der dem Schnittpunkt S zugeordnete Kreis (Abb. 4b).

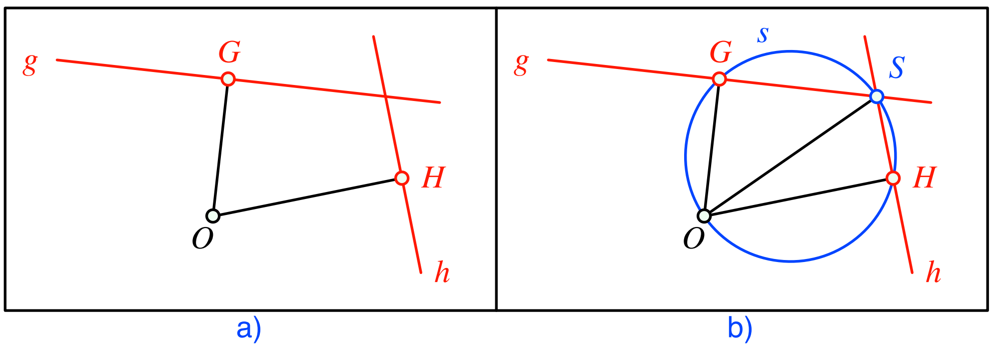

Abb. 4: Schneiden

Damit können wir alle Sätze der Inzidenzgeometrie transformieren.

4 Satz von Desargues

4.1 Gegenüberstellung

Als Beispiel transformieren wir den Satz von Desargues. Zunächst rein sprachlich mit einer Gegenüberstellung.

Schritt	Desargues	Transformiert
1	Punkt S zeichnen	Kreis s durch O zeichnen
2	Drei Geraden a, b, c durch S	Drei Punkte A, B, C auf s
3	Punkte A_1, A_2 auf a Punkte B_1, B_2 auf b Punkte C_1, C_2 auf c	Kreise a_1, a_2 durch A und O Kreise b_1, b_2 durch B und O Kreise c_1, c_2 durch C und O
4	$a_1 = B_1C_1$ $b_1 = C_1A_1$ $c_1 = A_1B_1$	A_1, O Schnittpunkte von b_1, c_1 B_1, O Schnittpunkte von c_1, a_1 C_1, O Schnittpunkte von a_1, b_1
5	$a_2 = B_2C_2$ $b_2 = C_2A_2$ $c_2 = A_2B_2$	A_2, O Schnittpunkte von b_2, c_2 B_2, O Schnittpunkte von c_2, a_2 C_2, O Schnittpunkte von a_2, b_2
6	$A°$ Schnittpunkt von a_1, a_2 $B°$ Schnittpunkt von b_1, b_2 $C°$ Schnittpunkt von c_1, c_2	$a°$ Kreis durch O, A_1, A_2 $b°$ Kreis durch O, B_1, B_2 $c°$ Kreis durch O, C_1, C_2
7	$A°, B°, C°$ kollinear auf t	O, T Schnittpunkte von $a°, b°, c°$

4.2 Schrittweise Konstruktion der Transformierten

Zunächst wählen wir den Hauptpunkt O.

4.2.1 Schritt 1

Wir zeichnen einen beliebigen schwarzen Kreis s durch den Hauptpunkt O.

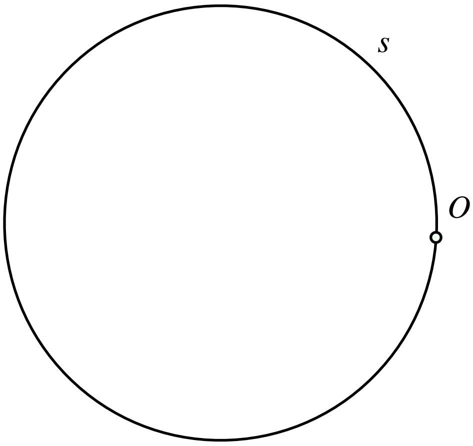

Abb. 5.1: Schwarzer Kreis durch den Hauptpunkt

4.2.2 Schritt 2

Wir wählen drei Punkte A, B, C auf dem Kreis s.

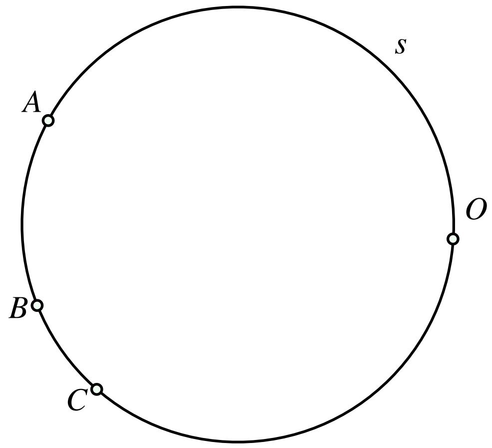

Abb. 5.2: Drei Punkte auf dem schwarzen Kreis

4.2.3 Schritt 3

Wir zeichnen je zwei beliebige Kreise a_1, a_2 durch A und O, dann b_1, b_2 durch B und O und schließlich c_1, c_2 durch C und O. Der erste Kreis ist jeweils blau, der zweite violett gezeichnet.

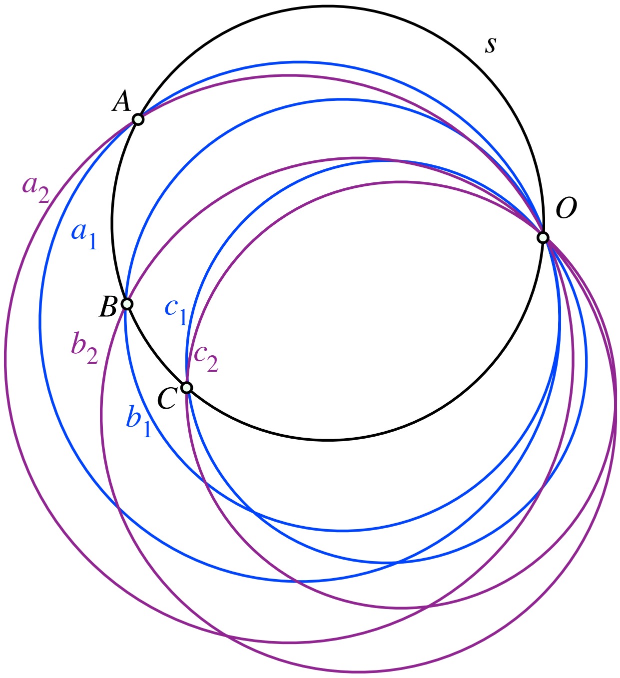

Abb. 5.3: Drei blaue und drei violette Kreise

4.2.4 Schritt 4

Wir zeichnen zusätzlich zu O folgende Schnittpunkte: A_1 zweiter Schnittpunkt von b_1, c_1, B_1 zweiter Schnittpunkt von c_1, a_1 und C_1 zweiter Schnittpunkt von a_1, b_1. Die Schnittpunkte sind blau gezeichnet.

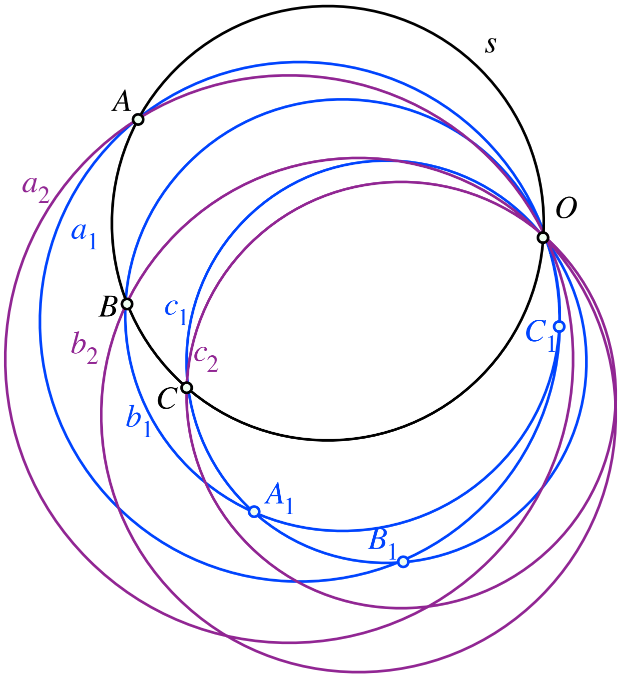

Abb. 5.4: Drei blaue Schnittpunkte

4.2.5 Schritt 5

Wir zeichnen zusätzlich zu O folgende Schnittpunkte: A_2 zweiter Schnittpunkt von b_2, c_2, B_2 zweiter Schnittpunkt von c_2, a_2 und C_2 zweiter Schnittpunkt von a_2, b_2. Diese Schnittpunkte sind violett gezeichnet.

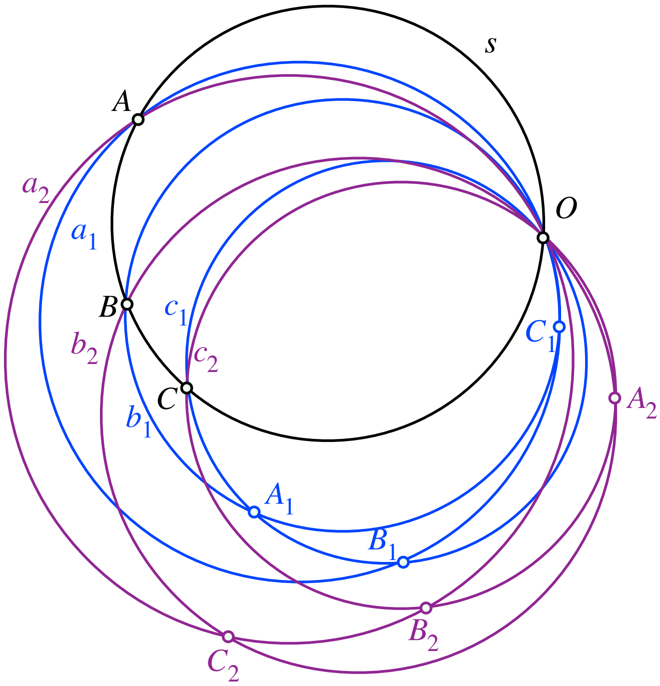

Abb. 5.5: Drei violette Schnittpunkte

4.2.6 Schritt 6

Wir zeichnen den Kreis $a°$ durch O, A_1, A_2, den Kreis $b°$ durch O, B_1, B_2 und den Kreis $c°$ durch O, C_1, C_2.

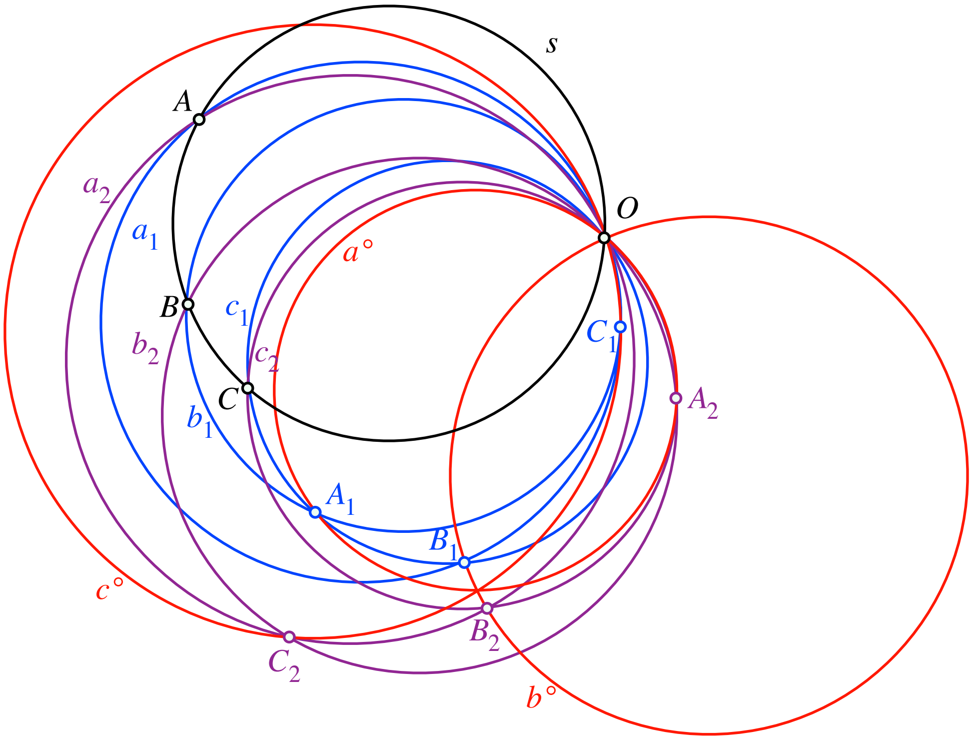

Abb. 5.6: Drei rote Kreise

4.2.7 Schritt 7

Die drei Kreise $a°$, $b°$, $c°$ haben neben O noch einen zweiten gemeinsamen Schnittpunkt. In der Abbildung 5.7 ist er mit T bezeichnet.

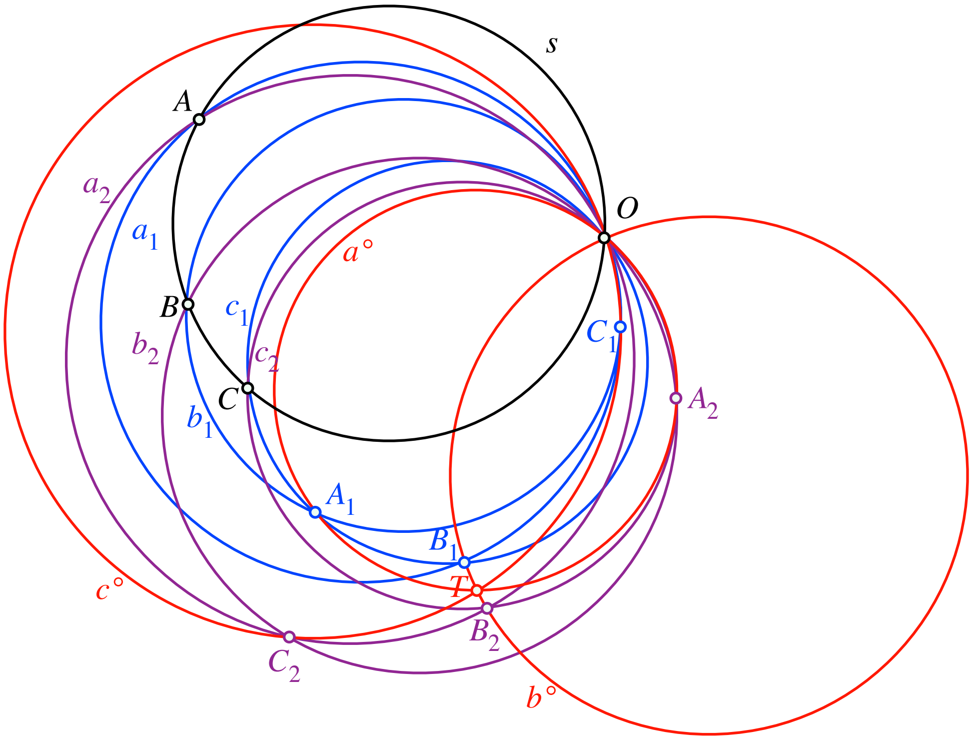

Abb. 5.7: Zwei gemeinsame Schnittpunkte

4.3 Beweis und Bemerkung

Der Beweis der Schnittpunkteigenschaft ergibt sich aus dem Beweis des Satzes von Desargues.

Alle neun Kreise der Abbildung 5.7 verlaufen durch den Hauptpunkt O. Wenn wir an einem Kreis mit dem Zentrum O spiegeln, werden diese neun Kreise zu neun Geraden, und wir erhalten die Figur von Desargues (in dualer Form) zurück. Unsere Transformation ist also lediglich eine Kreisspiegelung, zusammen mit der in der projektiven Geometrie üblichen Vertauschung von Punkt – Gerade sowie Verbinden – Schneiden.

5 Punktmengen

Nachdem wir einen beliebigen Punkt P durch den Thaleskreis p über der Strecke OP ersetzen (Abb. 1), können wir eine ganze Punktmenge entsprechend transformieren.

5.1 Drei Punkte

Drei Punkte A, B, C werden in drei Kreise a, b, c transformiert, die sich paarweise auf den (verlängerten) Seiten des Dreiecks ABC schneiden (Abb. 6).

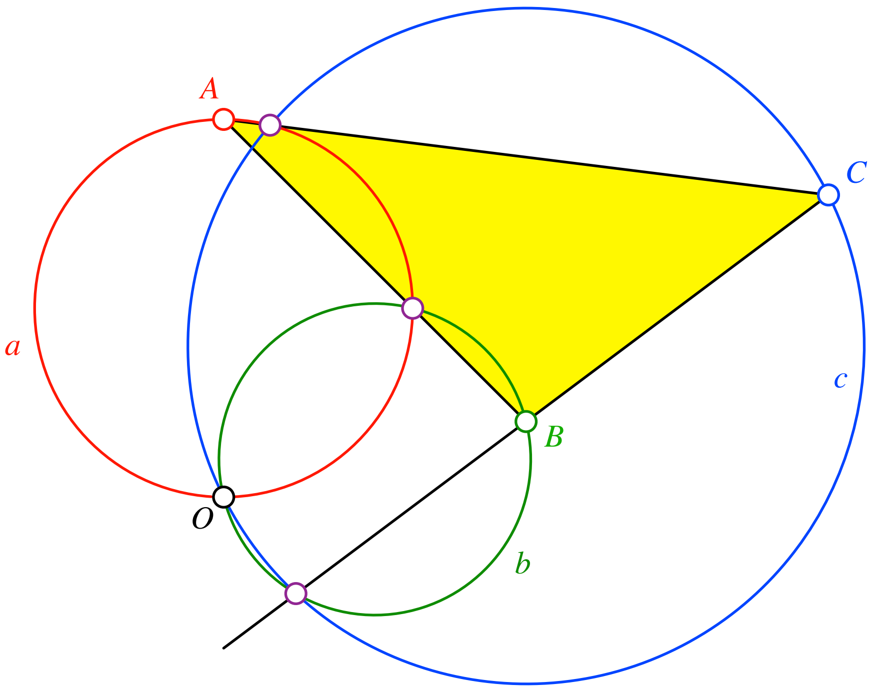

Abb. 6: Transformation dreier Punkte

5.2 Gerade

Die Punkte einer Geraden g werden transformiert zu einem Kreisbüschel (Abb. 7) durch den Hauptpunkt O und den Punkt G, zu welchem die Gerade g transformiert wird.

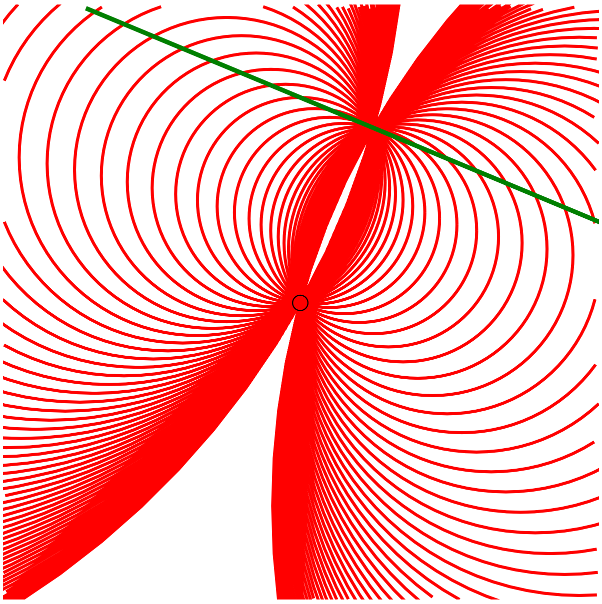

Abb. 7: Kreisbüschel

Falls die Gerade durch den Hauptpunkt O verläuft, erhalten wir die Figur der Abbildung 8.

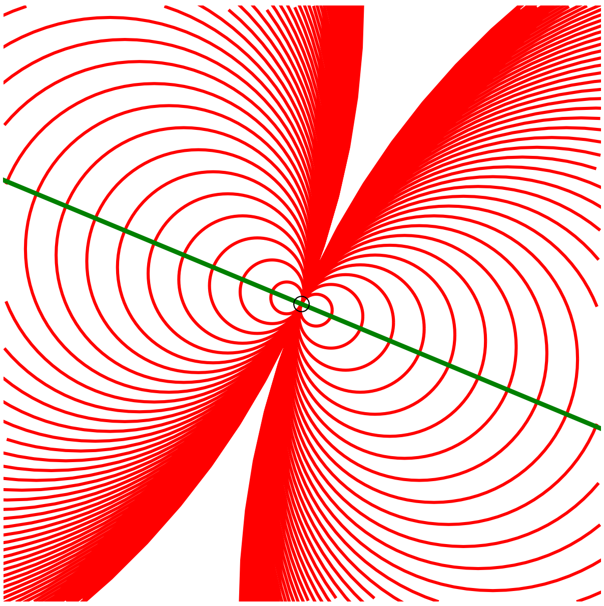

Abb. 8: Gerade durch Hauptpunkt

5.3 Kreis

Wir denken uns einen grünen Ausgangskreis und zeichnen zu jedem Kreispunkt den roten Thaleskreis über der durch den Hauptpunkt und diesen Kreispunkt gegebenen Strecke. Dabei unterscheiden wir je nachdem, ob der Hauptpunkt O im Innern, auf dem Rand oder außerhalb des grünen Kreises liegt.

Wenn der Hauptpunkt O mit dem Kreiszentrum zusammenfällt, erhalten wir die Rosen-Figur der Abbildung 9. Der grüne Ausgangskreis erscheint als Enveloppe der roten Thaleskreise.

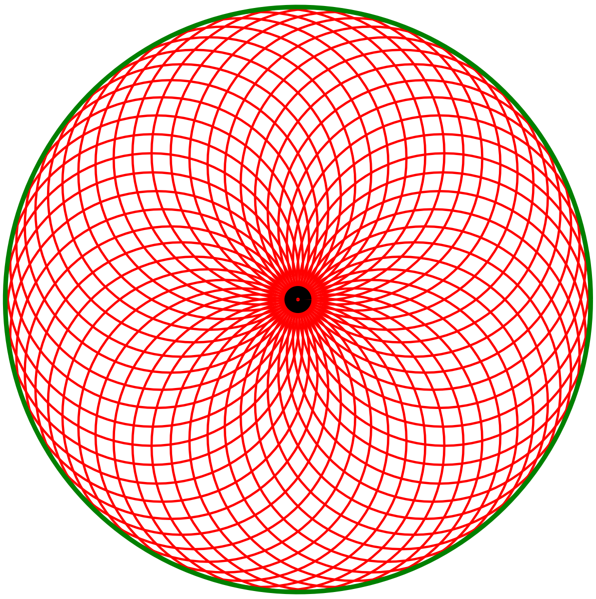

Abb. 9: Rose

Bei einem exzentrischen Hauptpunkt im Kreisinnern ergibt sich die Figur der Abbildung 10.

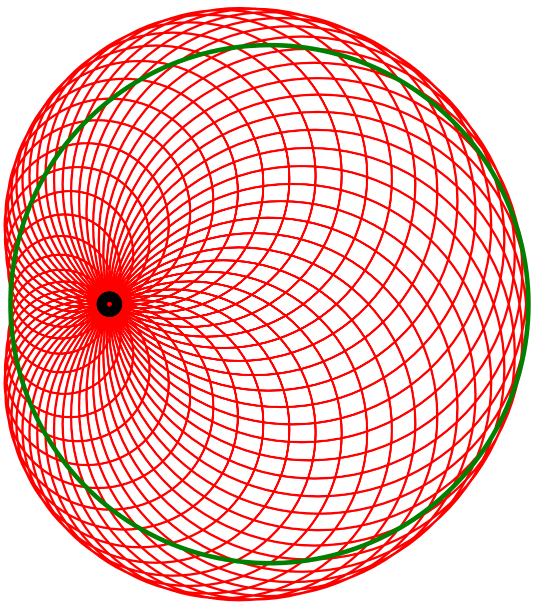

Abb. 10: Exzentrischer Hauptpunkt

Liegt der Hauptpunkt auf dem Rand des grünen Kreises, erhalten wir als Enveloppe die Kardioide (Abb. 11) (ohne Beweis).

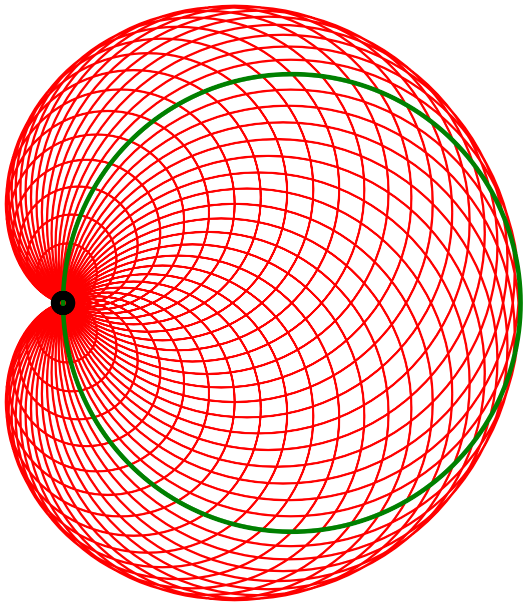

Abb. 11: Kardioide

Und schließlich noch ein Beispiel mit dem Hauptpunkt außerhalb des grünen Kreises (Abb. 12).

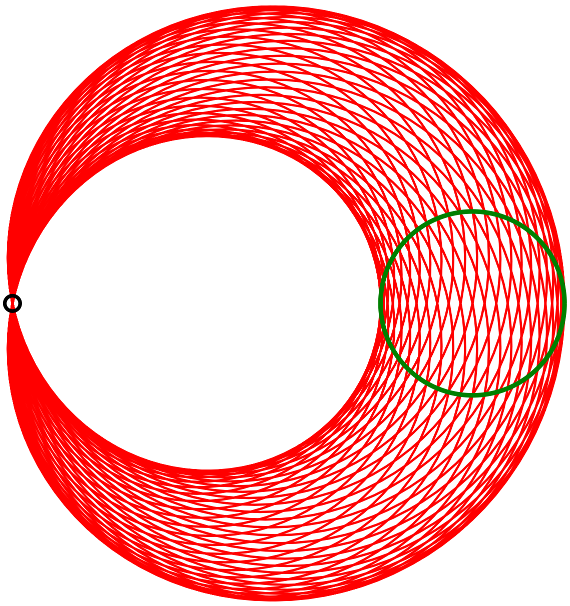

Abb. 12: Guter Mond, du gehst so stille