Hans Walser, [20150826]

Treppenfläche mit Rechtecken optimal ausschöpfen

1 Frage

Auf wie viele Arten kann eine Treppenfläche mit n Stufen optimal durch Rechtecke ausgeschöpft werden? Optimal heißt hier, dass man mit einem Minimum an Rechtecken auskommt.

Die Abbildung 1 zeigt zwei Möglichkeiten, wie eine Treppenfläche mit vier Stufen durch vier Rechtecke ausgeschöpft werden kann.

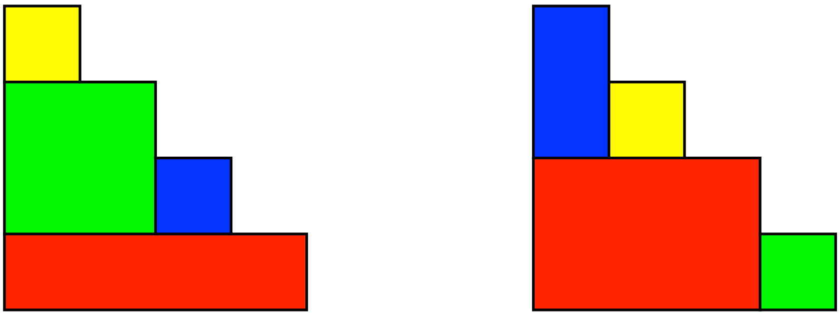

Abb. 1: Treppenfläche mit vier Stufen

2 Optimale Anzahl der benötigten Rechtecke

Bei einer Treppenfläche mit n Stufen ist die minimale Anzahl mindestens n. Begründung: Die Treppenfläche hat n Treppenecken. Jede Treppen-Ecke muss Ecke eines Rechtecks werden. Ein Rechteck kann aber höchstens eine Ecke in einer Treppenecke haben.

Andererseits gibt es eine einfache Zerlegung mit n horizontalen Rechtecken (Abb. 2).

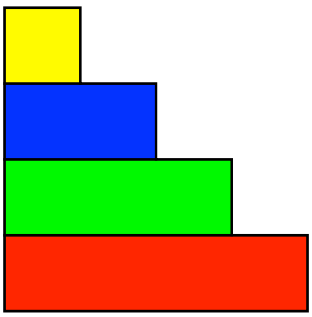

Abb. 2: Einfachste Zerlegung

Die minimale Anzahl der benötigten Rechtecke ist also gleich der Stufenzahl n. Jedes der n Rechtecke hat genau eine Ecke in einer der n Treppenecken.

3 Rekursives Vorgehen

Wir bezeichnen die gesuchte Anzahl optimaler Zerlegungen mit a_n .

Wir denken uns nun eine Treppe mit n Treppenecken und fixieren die Treppenecke mit der Nummer k (von unten her gezählt). Die Abbildung 3 zeigt die Situation für $n = 16$ und $k = 5$.

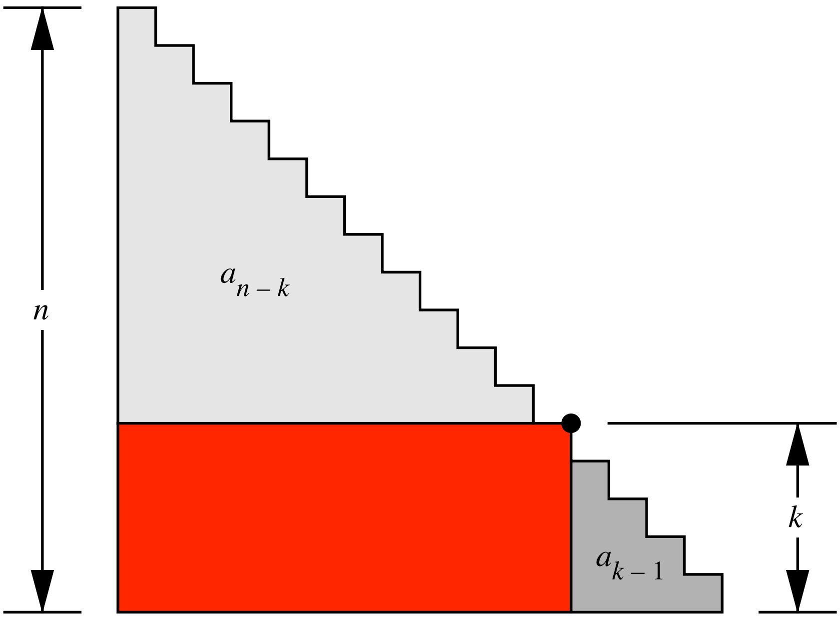

Abb. 3: Überlegungsfigur

Zu dieser fixierten Treppenecke zeichnen wir das größtmögliche Rechteck (rot).

Dann bleibt unten rechts eine Treppenfläche mit $k-1$ Stufen übrig, die sich auf a_{k-1} Arten ausschöpfen lässt, und oben eine Treppenfläche mit $n-k$ Stufen, die sich ihrerseits auf a_{n-k} Arten ausschöpfen lässt. Weil wir jede Ausschöpfung unten rechts mit jeder Ausschöpfung oben kombinieren können, gibt es $a_{k-1}a_{n-k}$ Ausschöpfungsarten mit dem großen roten Rechteck. Da k von 1 bis n variieren kann, sind die beiden Zahlen $k-1$ und $n-k$ beide kleiner als n.

Jetzt orgeln wir durch und erhalten die Rekursionsformel:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}a_{n-k} \qquad (1)$$

Nun stellt sich noch die Frage des Startwertes. Wir setzen $a_0 = 1$ denn eine Treppenfläche mit 0 Stufen kann nur auf eine Art ausgeschöpft werden, nämlich gar nicht. Es gibt viele Arten des Redens, aber nur eine Art des Schweigens.

4 Tabelle

Mit dem Startwert $a_0 = 1$ und der Rekursion (1) ergeben sich die Werte der Tabelle 1. Die Zahlen wachsen recht rasch.

n	a_n
0	1
1	1
2	2
3	5
4	14
5	42
6	132
7	429
8	1430
9	4862
10	16796

n	a_n
11	58786
12	208012
13	742900
14	2674440
15	9694845
16	35357670
17	129644790
18	477638700
19	1767263190
20	6564120420

Tab. 1: Anzahl optimaler Ausschöpfungen

5 Beispiele

5.1 Eine Stufe

Das geht nur auf eine Art.

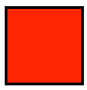

Abb. 4: Eine Stufe

5.2 Zwei Stufen

Es gibt zwei Möglichkeiten.

Abb. 5: Zwei Stufen

5.3 Drei Stufen

Da gibt es fünf Arten.

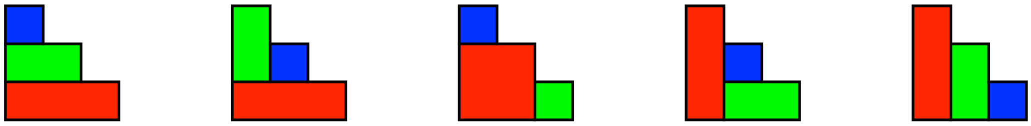

Abb. 6: Drei Stufen

5.4 Vier Stufen

Bereits 14 Arten der Ausschöpfung.

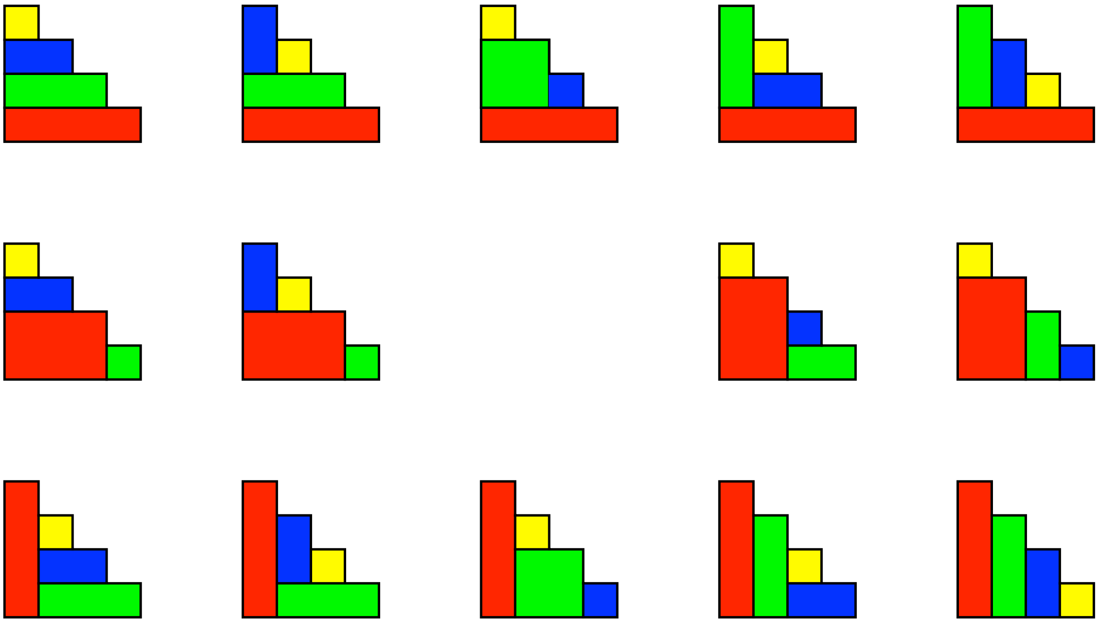

Abb. 7: Vier Stufen

5.5 Fünf Stufen

Nun haben wir 42 Arten der Ausschöpfung.

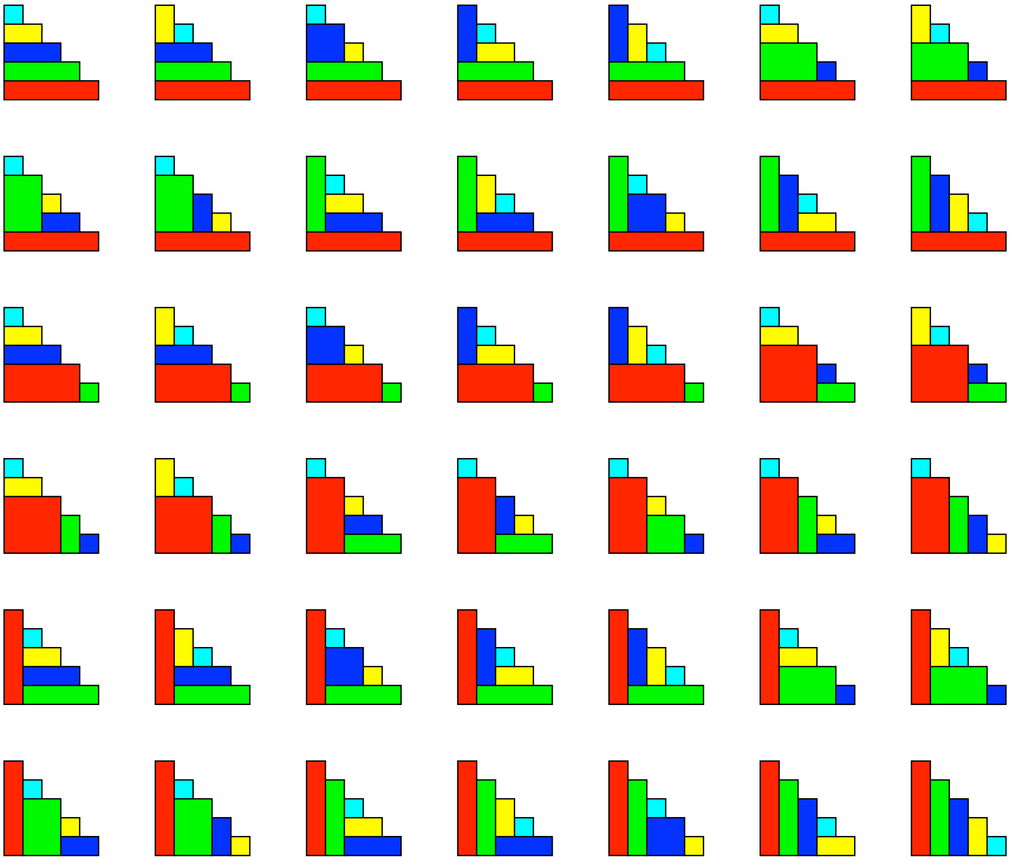

Abb. 8: Fünf Stufen

6 Catalan-Zahlen

Unsere Zahlen sind die so genannten *Catalan-Zahlen*, welche üblicherweise mit C_n bezeichnet werden. Es gilt die Formel:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{2}$$