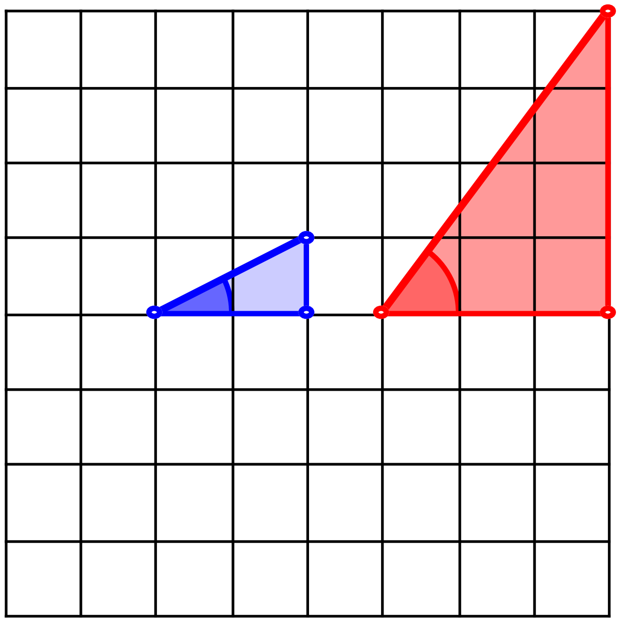
Hans Walser, [20060812a]

Trigonometrie im Schachbrett

Anregung: H. S.

1 Ausgangslage

Die folgende Figur enthält zwei rechtwinklige Dreiecke, das rote Dreieck ist das pythagoreische Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4, 5. Die Figur lässt einen Zusammenhang zwischen den markierten Winkeln vermuten.



Winkel?

Es ist:

$$\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right) \approx 26.565°$$

$$\arctan\left(\tfrac{4}{3}\right) \approx 53.130°$$

Wir vermuten:

$$2\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right) = \arctan\left(\tfrac{4}{3}\right)$$

2 Beweise

2.1 Rechnerischer Beweis

Zu zeigen ist:

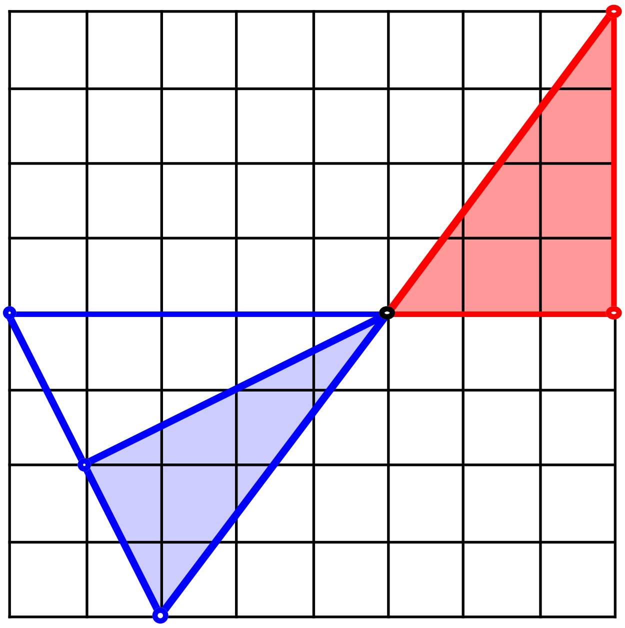
$$2\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right) = \arctan\left(\tfrac{4}{3}\right)$$

$$\tan\left(2\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \tfrac{4}{3}$$

Unter Verwendung des Additionstheorems für den Tangens erhalten wir:

$$\tan\left(2\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \tan\left(\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

2.2 Beweis im Schachbrett



Beweis ohne Worte

3 Hintergrund

Die primitiven pythagoreischen Dreiecke können wie folgt parametrisiert werden:

Zu $u, v \in \mathbb{N}$, $u > v$, $\mathrm{ggT}(u,v) = 1$, $u - v = 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ ist:

$$a = u^2 - v^2$$
$$b = 2uv$$
$$c = u^2 + v^2$$

Beispiele:

u	v	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41

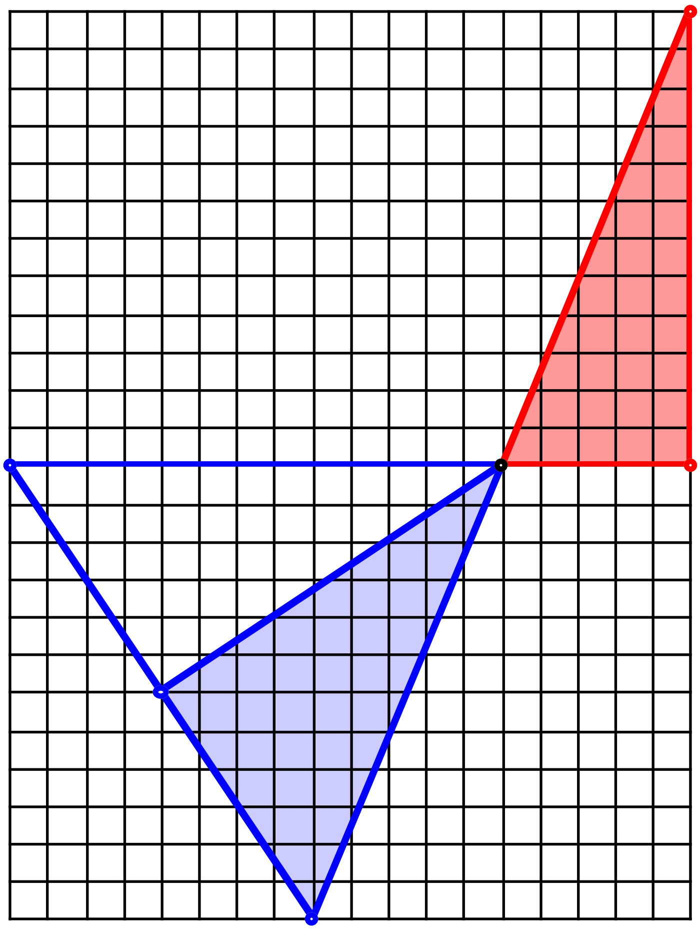
In dieser Situation gilt:

$$2\arctan\left(\tfrac{v}{u}\right) = \arctan\left(\tfrac{b}{a}\right)$$

Beweis rechnerisch:

$$\tan\left(2\arctan\left(\tfrac{v}{u}\right)\right) = \frac{2\frac{v}{u}}{1-\left(\frac{v}{u}\right)^2} = \frac{\frac{2v}{u}}{\frac{u^2-v^2}{u^2}} = \frac{2uv}{u^2-v^2} = \frac{b}{a}$$

Die folgende Figur illustriert den Fall für $u = 3, v = 2$ mit $a = 5, b = 12, c = 13$.



Beweis ohne Worte