Hans Walser, [20191213]

Trigonometrie im Schachbrett

1 Worum geht es?

Visuelle Beweise (Proofs without Words) im Quadratgitter für einige trigonometrische Gleichungen.

2 Der Klassiker

Die Abbildung 1 zeigt den visuellen Beweis für:

$$\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)+\arctan\left(\tfrac{1}{3}\right)=\arctan\left(1\right) \qquad (1)$$

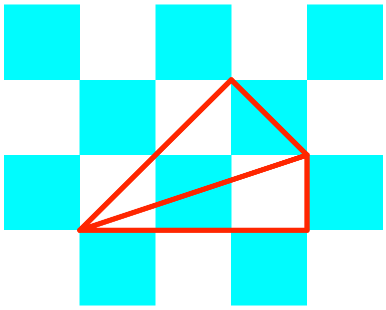

Abb. 1

3 Varianten

Die Abbildung 2 zeigt den Beweis für:

$$\arctan\left(\tfrac{2}{3}\right)+\arctan\left(\tfrac{1}{5}\right)=\arctan\left(1\right) \qquad (2)$$

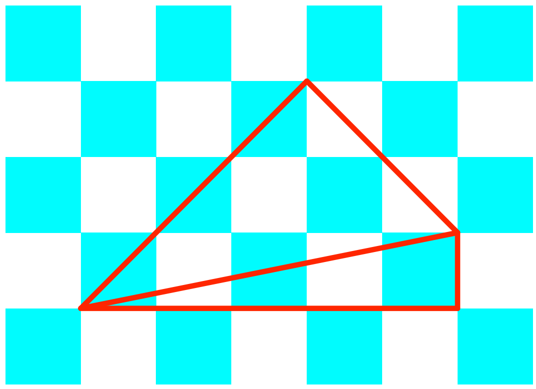

Abb. 2

Die Abbildung 3 zeigt:

$$\arctan\left(\tfrac{1}{4}\right)+\arctan\left(\tfrac{3}{5}\right)=\arctan\left(1\right) \tag{3}$$

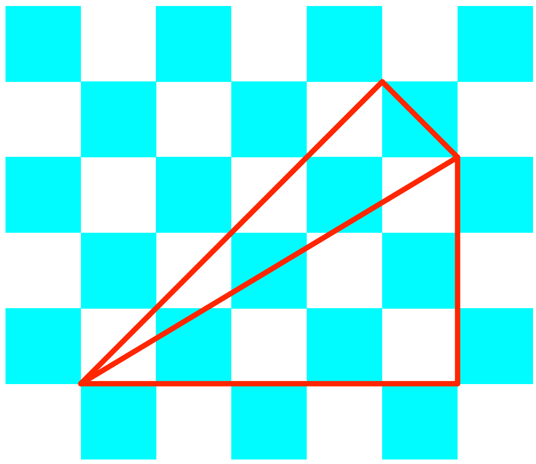

Abb. 3

Wir sehen, wie der Hase läuft.
Allgemein kann gezeigt werden: Für $n,k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n$ gilt:

$$\arctan\left(\tfrac{k}{n}\right)+\arctan\left(\tfrac{n-k}{n+k}\right)=\arctan\left(1\right) \tag{4}$$

4 Weitere Beispiele

Bis jetzt war immer ein Winkel von 45° im Spiel. Das muss aber nicht sein.
Die Abbildung 4 illustriert:

$$\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)+\arctan\left(\tfrac{4}{7}\right)=\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right) \tag{5}$$

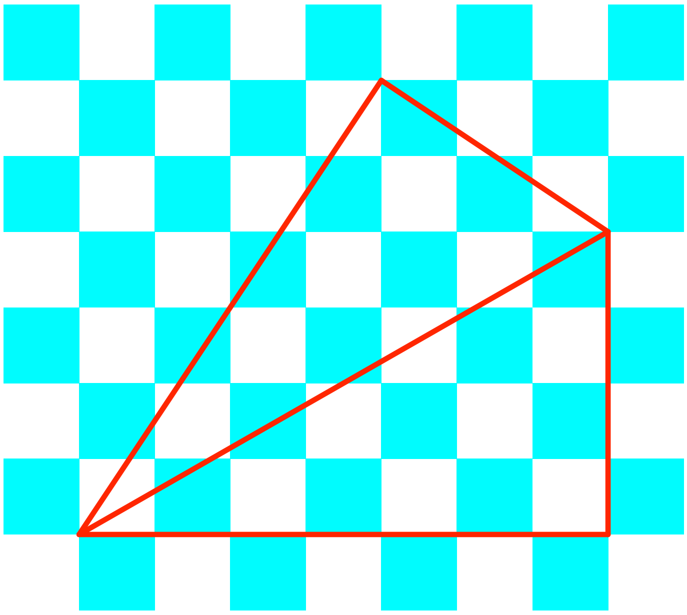

Abb. 4

Die Abbildung 5 illustriert:

$$\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)+\arctan\left(\tfrac{1}{4}\right)+\arctan\left(\tfrac{1}{5}\right)+\arctan\left(\tfrac{1}{13}\right)=\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right) \tag{6}$$

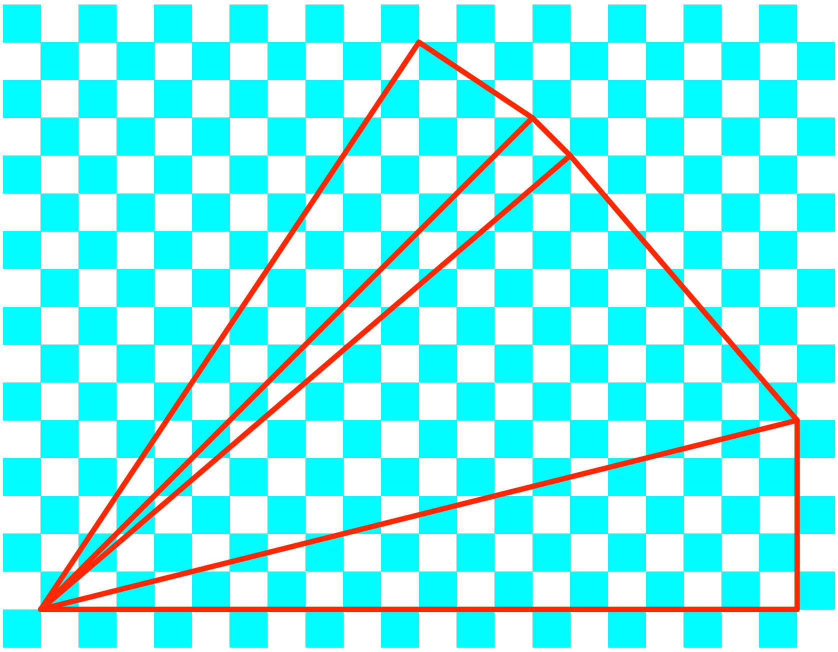

Abb. 5

Website

Hans Walser: Trigonometrie im Schachbrett
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/T/Trigo_im_Schachbrett/Trigo_im_Schachbrett.htm