Hans Walser, [20130120]

Übergangsmatrix

Anregung: B. J., B.

1 Wechselwähler

In Yellowland gibt es nur zwei politische Parteien, die Schwarzen und die Roten. Die Wähler bleiben in der Regel ihrer Partei treu. Allerdings wechseln bei jeder Wahl 20% der bisherigen Schwarz-Wähler zu Rot, während 10% der Rot-Wähler zu Schwarz wechseln.

Bei den letzten Wahlen erhielten die Schwarzen 95% der Stimmen und bildeten daher die Regierung.

Wie sieht die politische Zukunft von Yellowland aus?

1.1 Prognosen sind schwierig

Anteilmäßig wechseln mehr Schwarz-Wähler zu rot als umgekehrt. Der Stimmenanteil der Schwarzen wird daher abnehmen, jedenfalls so lange Schwarz eine solide Mehrheit hat. Die Frage ist, ob Rot je eine Mehrheit erreichen kann.

1.2 Tabelle

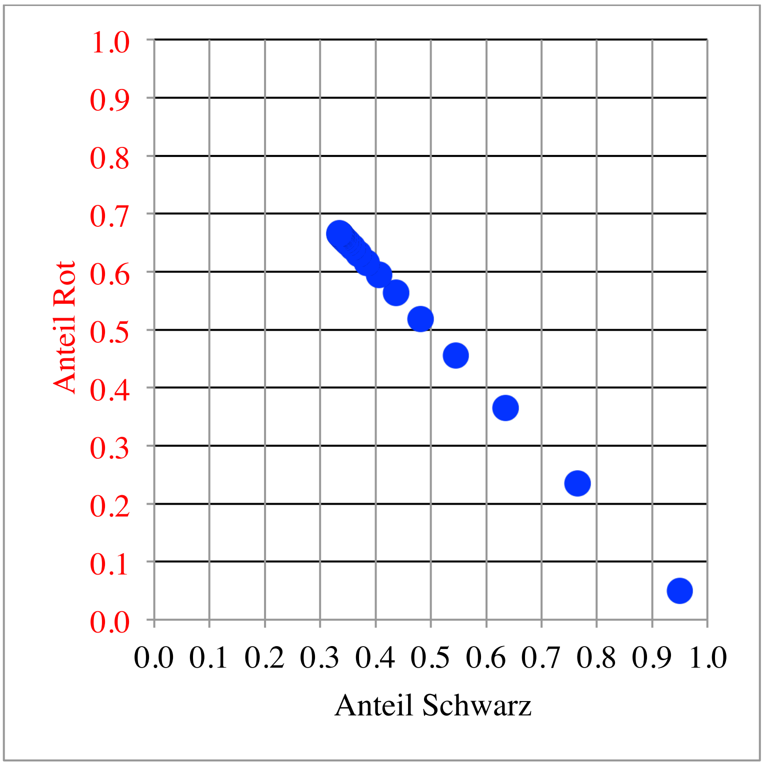
Mit Excel ergibt sich:

Wahlperiode	Anteil Schwarz	Anteil Rot
0	0.950000	0.050000
1	0.765000	0.235000
2	0.635500	0.364500
3	0.544850	0.455150
4	0.481395	0.518605
5	0.436977	0.563024
6	0.405884	0.594116
7	0.384118	0.615882
8	0.368883	0.631117
9	0.358218	0.641782
10	0.350753	0.649247
11	0.345527	0.654473
12	0.341869	0.658131
13	0.339308	0.660692
14	0.337516	0.662484
15	0.336261	0.663739
16	0.335383	0.664617
17	0.334768	0.665232
18	0.334338	0.665662
19	0.334036	0.665964
20	0.333825	0.666175

Bereits nach vier weiteren Wahlgängen hat Rot eine Mehrheit. So schnell kann das wechseln.

Auf Grund der Zahlen vermuten wir, dass sich schließlich eine stabile $\frac{2}{3}$-Mehrheit für Rot ergibt.

Die Abbildung zeigt die Datenpunkte.



Datenpunkte

Da die Summe der gepaarten Daten immer 1 ist, liegen die Punkte auf der Geraden $x+y=1$.

1.3 Übergangsmatrix

Wir fassen die Anteile von Schwarz und Rot zu einem Vektor zusammen und indizieren gemäß der Wahlnummerierung, also in unserem Beispiel:

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.05 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 0.765 \\ 0.235 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0.6355 \\ 0.3645 \end{bmatrix}, \ldots$$

Damit gilt folgende Rekursion:

$$v_{n+1} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} v_n$$

Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

heißt *Übergangsmatrix*. Manchmal spricht man auch von einer *Prozessmatrix* oder *stochastischen Matrix*. Die Spaltensummen der Übergangsmatrix sind 1. Es hat keine negativen Matrixeinträge.

1.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Für die Matrix A finden wir die Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 1,\ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = 0.7,\ u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Beim Handrechnen ist man angenehm überrascht, wie schlank das geht. Liegt da ein präpariertes „Lehrerbeispiel“ vor?

Weiter ist der Eigenwert $\lambda_1 = 1$ überraschend, der zugehörige Eigenvektor kann in der Form

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

geschrieben werden und gibt die vermutete Grenzlage der Stimmenverteilung wieder. Wir vermuten also:

$$\lim_{n \to \infty} v_n = u_1$$

Der zweite Eigenvektor kann nicht so justiert werden, dass eine Spaltensumme 1 ergibt.

1.5 Beweis

Wir möchten zeigen:

$$\lim_{n \to \infty} v_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Für den Beweis schreiben wir v_n in der Form:

$$v_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\varepsilon_n \\ \frac{2}{3}-\varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Diese Schreibweise ist immer möglich, da die Vektoren die Spaltensumme 1 haben. Damit erhalten wir:

$$v_{n+1} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\varepsilon_n \\ \frac{2}{3}-\varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}+0.7\varepsilon_n \\ \frac{2}{3}-0.7\varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Somit ist $\varepsilon_{n+1} = 0.7\varepsilon_n$, der „Fehler“ ist eine geometrische Nullfolge.

Der Faktor 0.7 ist sowohl die Determinante wie auch der zweite Eigenwert der Matrix. Ist das Zufall?

2 Allgemein

Wir studieren die Übergangsmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1-b & a \\ b & 1-a \end{bmatrix}$$

Dabei sei $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$. (Die Grenzfälle werden unten separat diskutiert.)

Die Matrix A hat die Determinante $1-a-b$. Es ist $|\det(A)| < 1$.

2.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Charakteristische Gleichung für die Eigenwerte:

$$\lambda^2 + (a+b-2)\lambda + (1-a-b) = 0$$

Diskriminante der quadratischen Gleichung:

$$D = (a+b-2)^2 - 4(1-a-b) = (a+b)^2$$

Eigenwerte:

$$\lambda_1 = \tfrac{2-a-b+a+b}{2} = 1 \qquad \lambda_2 = \tfrac{2-a-b-a-b}{2} = 1-a-b = \det(A)$$

Der Eigenwert $\lambda_1 = 1$ in unserem Beispiel war also kein „Lehrerbeispiel“, sondern liegt in der Natur der Sache. Den zugehörigen Eigenvektor normieren wir auf die Spaltensumme 1 und erhalten:

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} \end{bmatrix}$$

Der Eigenwert $\lambda_2 = 1-a-b$ ist die Determinante der Matrix A. Wir erhalten den zugehörigen Eigenvektor:

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Auch das ist ein alter Bekannter.

2.2 Folge und Grenzwert

Wir starten eine Folge v_n mit dem Startvektor

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1-p \\ p \end{bmatrix}, \quad 0 \le p \le 1$$

und der Rekursion:

$$v_{n+1} = Av_n$$

Dann ist:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = u_1$$

Beweis:

Da die Übergangsmatrix A und der Startvektor v_0 die Spaltensumme 1 haben, ist dies für alle Vektoren v_n der Fall.

Ein beliebiger Vektor der Folge kann daher in der Form

$$v_n = \begin{bmatrix} \frac{a}{a+b} + \varepsilon_n \\ \frac{b}{a+b} - \varepsilon_n \end{bmatrix} = u_1 + \varepsilon_n u_2$$

geschrieben werden. Wir setzen dies in die Rekursion ein:

$$v_{n+1} = Av_n = A\left(u_1 + \varepsilon_n u_2\right) = \lambda_1 u_1 + \varepsilon_n \lambda_2 u_2 = u_1 + \varepsilon_n \lambda_2 u_2$$

Somit ist $\varepsilon_{n+1} = \lambda_2 \varepsilon_n$. Wegen $|\lambda_2| = |\det(A)| < 1$ ist die Folge ε_n eine Nullfolge. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2.3 Sonderfälle

Wir haben folgende Falltabelle:

	$b=0$	$0<b<1$	$b=1$
$a=0$	I	II	III
$0<a<1$	IV	V	VI
$a=1$	VII	VIII	IX

Falltabelle

Die gelb markierten Fälle II, IV, V, VI, VIII sind regulär.

Im Fall I haben wir die Matrix A die Einheitsmatrix. Wir erhalten eine konstante Folge, welche durch den Startvektor gegeben ist.

Im Fall III haben wir die Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zu beliebigem Startvektor ergibt sich nach einem Schritt die konstante Folge:

$$v_1 = v_2 = v_3 = \cdots = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = u_1$$

Im Fall VI haben wir die Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zu beliebigem Startvektor ergibt sich nach einem Schritt die konstante Folge:

$$v_1 = v_2 = v_3 = \cdots = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_1$$

Im Fall IX schließlich ergibt sich die Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mit dem Startvektor

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1-p \\ p \end{bmatrix}$$

erhalten wir zunächst

$$v_1 = \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}$$

und weiter die alternierende Folge:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_4 = \cdots = v_0 \\ v_3 &= v_5 = \cdots = v_1 \end{aligned}$$

Es gibt keinen Limes.