

Hans Walser, [20200709]

## Umviereck

Anregung: M. E., B.

### 1 Worum geht es?

Die Seitenmitten eines beliebigen Viereckes bilden ein Parallelogramm.

Wir gehen nun umgekehrt von einem Parallelogramm aus und suchen Umvierecke, deren Seitenmittenviereck das gegebene Parallelogramm ist.

Es gibt unendlich viele Lösungen, und zwar sowohl konvexe, nicht konvexe und überschlagene Vierecke.

Konstruktion der Lösungen mit Punktspiegelungen.

Die Verallgemeinerung auf  $n$ -Ecke führt zu einem Paritätsproblem bezüglich  $n$ . Bei ungeradem  $n$  gibt es genau eine Lösung. Bei geradem  $n$  gibt es entweder keine oder dann unendlich viele Lösungen.

### 2 Seitenmittenviereck

Das Seitenmittenviereck  $ABCD$  eines beliebigen Viereckes  $RSTU$  ist ein Parallelogramm (Abb. 1). Dieser Satz geht auf *Varignon* zurück ([Pierre de Varignon](#), \* 1654 Caen, † 23. Dezember 1722 Paris).

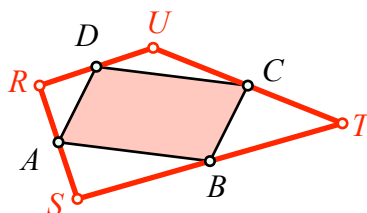


Abb. 1: Seitenmittenviereck

### 3 Parallelogramm gegeben

Es sei nun ein Parallelogramm  $ABCD$  gegeben, und wir suchen ein passendes Umviereck  $RSTU$ . Dazu arbeiten wir mit Punktspiegelungen. Wir wählen einen beliebigen Startpunkt  $R$  (Abb. 2a). Diesen Punkt  $R$  spiegeln wir an der Ecke  $A$  und erhalten den Spiegelpunkt  $S$  (Abb. 2b).

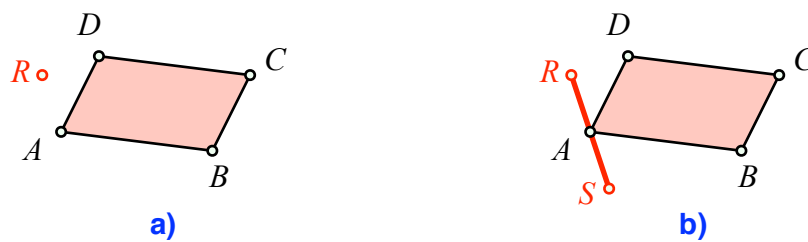


Abb. 2: Start und Punktspiegelung

Nun spiegeln wir den Punkt  $S$  an der Ecke  $B$  und erhalten so den Punkt  $T$  (Abb. 3a).

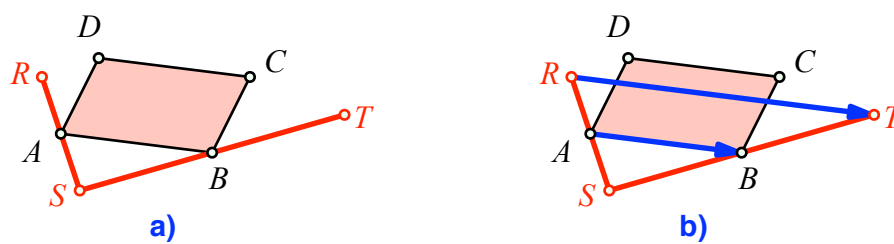
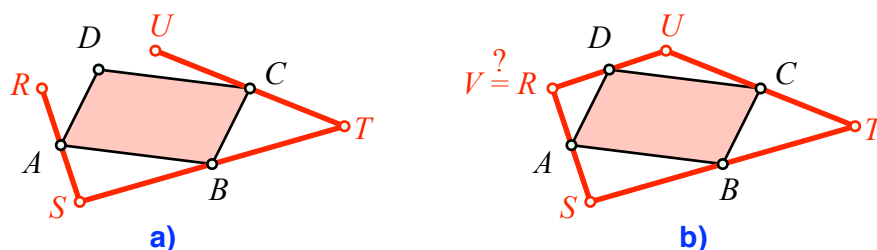


Abb. 3: Zweiter Schritt. Strahlensatz

Auf Grund des Strahlensatzes ist der Vektor  $\overrightarrow{RT}$  das Doppelte des Vektors  $\overrightarrow{AB}$ .

Wir spiegeln  $T$  an  $C$  und erhalten  $U$  (Abb. 4a). Die Spiegelung von  $U$  an  $D$  liefert den Punkt  $V$  (Abb. 4b).

Abb. 4: Ist  $V = R$ ?

Wir vermuten, dass  $V = R$ . Dies kann eingesehen werden wie folgt. Der Vektor  $\overrightarrow{TV}$  ist das Doppelte des Vektors  $\overrightarrow{CD}$  und damit entgegengesetzt gleich zum Vektor  $\overrightarrow{RT}$ .

Wir haben eine sogenannte *Schließungsfigur*.

Wegen der Punktspiegelungen sind die Ecken des Parallelogramms  $ABCD$  die Seitenmitten des Vierecks  $RSTU$ . Das Viereck  $RSTU$  ist also ein Umviereck zum Parallelo-

gramm  $ABCD$  und damit eine Lösung unseres Problems. Da der Startpunkt  $R$  beliebig gewählt wurde, gibt es unendlich viele Lösungen.

#### 4 Flächeninhalt

Der Flächeninhalt des Umvierecks  $RSTU$  ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Parallelogramms  $ABCD$ . Um diese einzusehen, setzen wir dem Parallelogramm ein zweites kongruentes Parallelogramm an (gelb in Abb. 5a). Damit ergibt sich ein Zerlegungsbeweis (Abb. 5b).

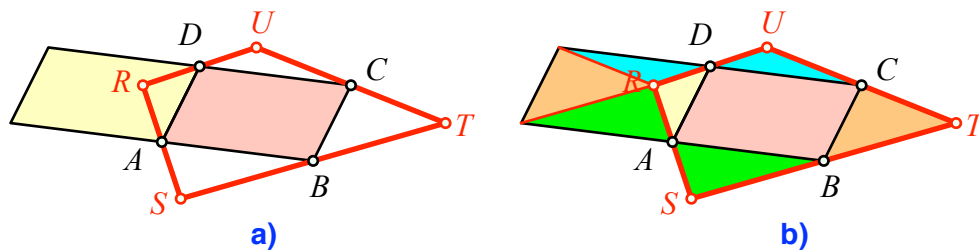


Abb. 5: Zerlegungsbeweis

#### 5 Parallelogrammraster

Wir betten die Figur in ein (unendlich groß gedachtes) Parallelogrammraster ein, das wir schachbrettmäßig färben (Abb. 6).

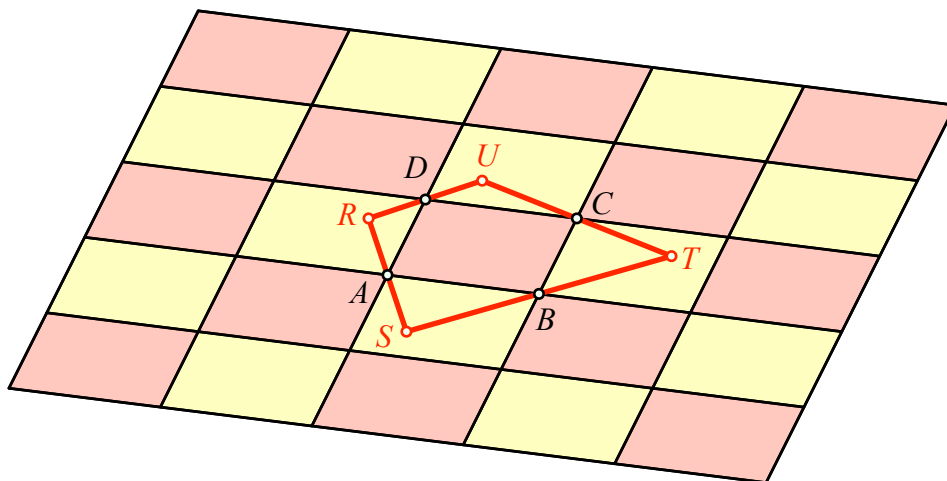


Abb. 6: Parallelogrammraster

Wir sehen, dass die Lösungspunkte  $R$ ,  $S$ ,  $T$  und  $U$  je in einem gelben Parallelogramm liegen.

## 6 Weitere Lösungen

Durch Variation des Startpunktes  $R$  erhalten wir weitere Lösungen (Abb. 7).

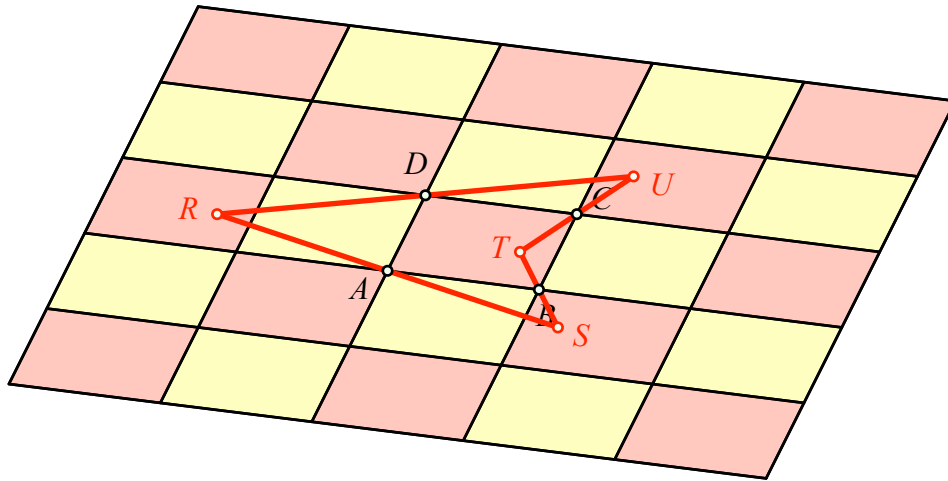


Abb. 7.1: Nicht konvexes Umviereck

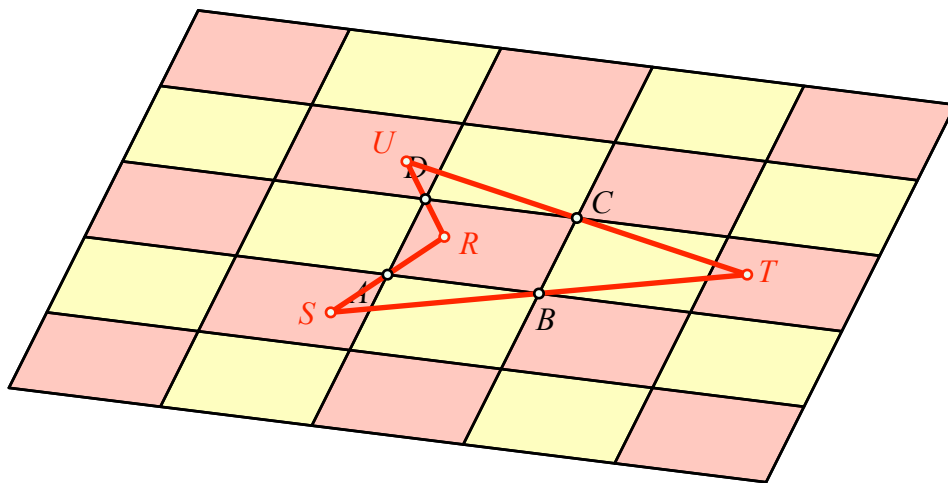


Abb. 7.2: Nicht konvexes Umviereck

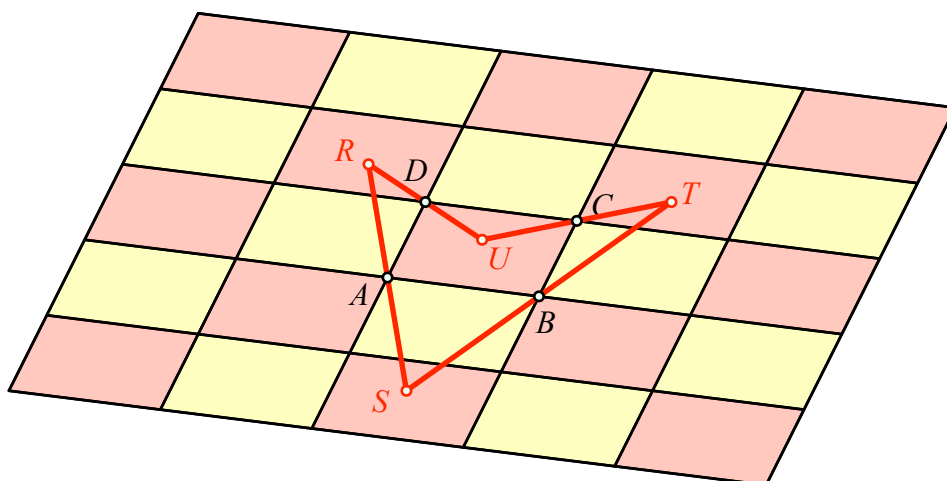


Abb. 7.3: Nicht konvexes Umviereck

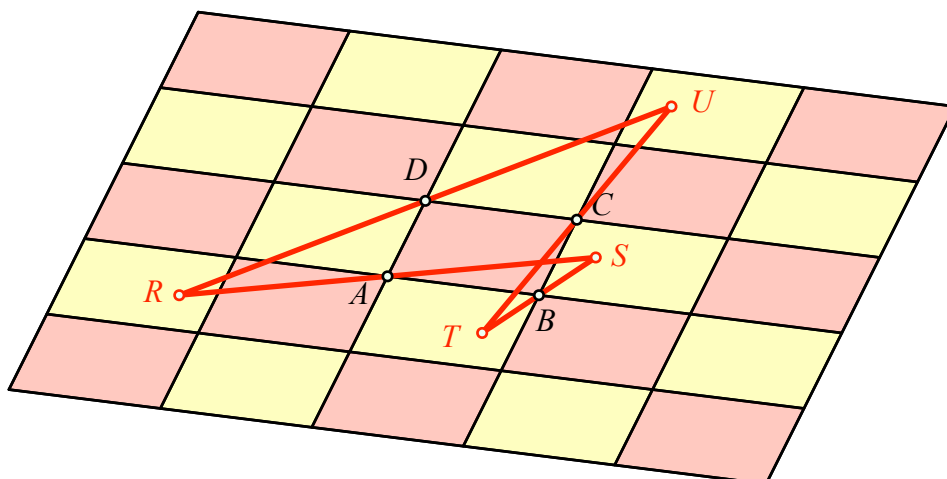


Abb. 7.4: Überschlagenes Umviereck

Die Lösungspunkte  $R$ ,  $S$ ,  $T$  und  $U$  sind jeweils in einem Rasterrechteck gleicher Farbe.

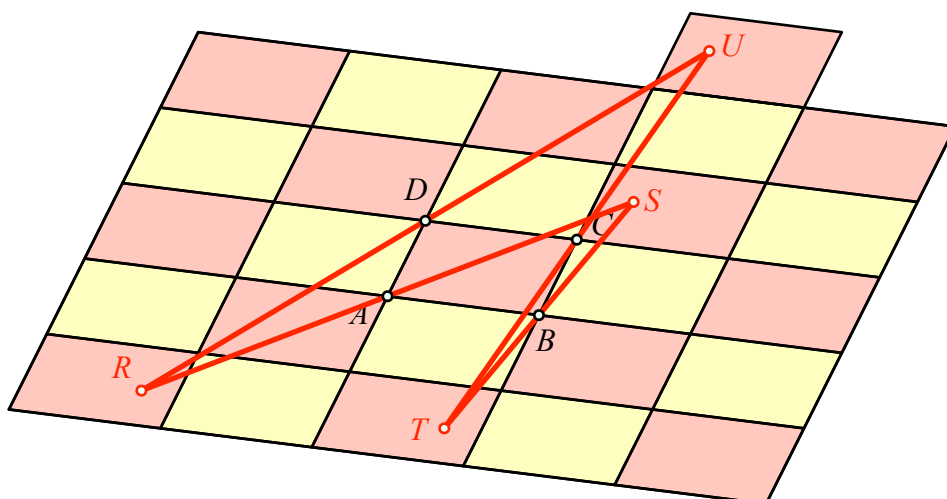


Abb. 7.5: Überschlagenes Umviereck

## 7 Sonderfälle

Durch spezielle Wahl des Startpunktes  $R$  auf Gitterlinien erhalten wir Dreiecke (Abb. 8).

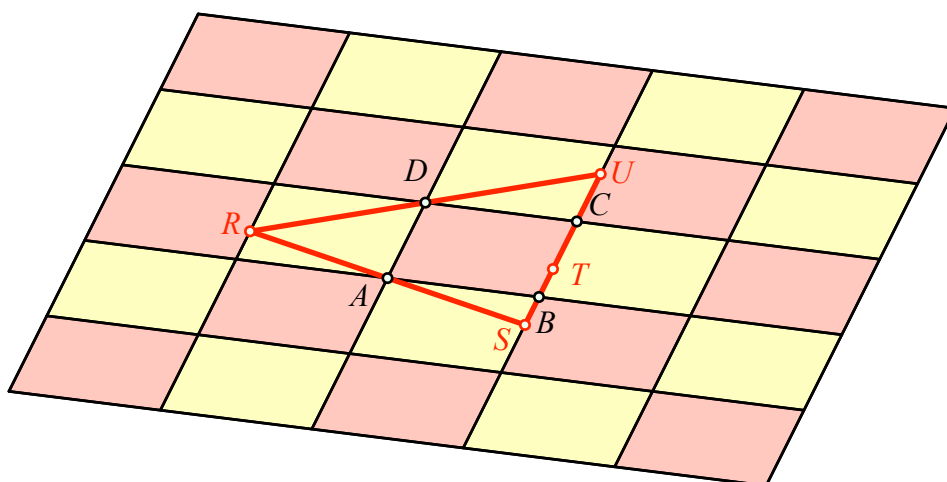


Abb. 8.1: Sonderfall Dreieck

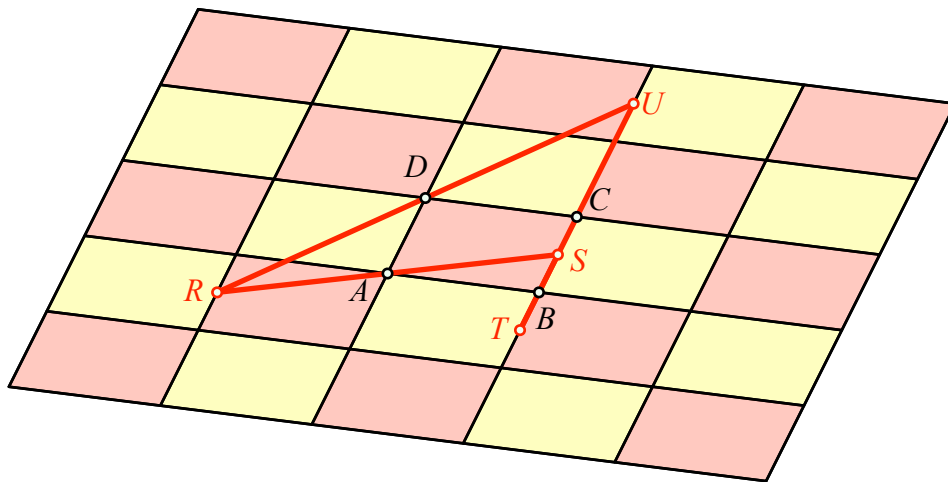


Abb. 8.2: „Überschlagenes“ Dreieck

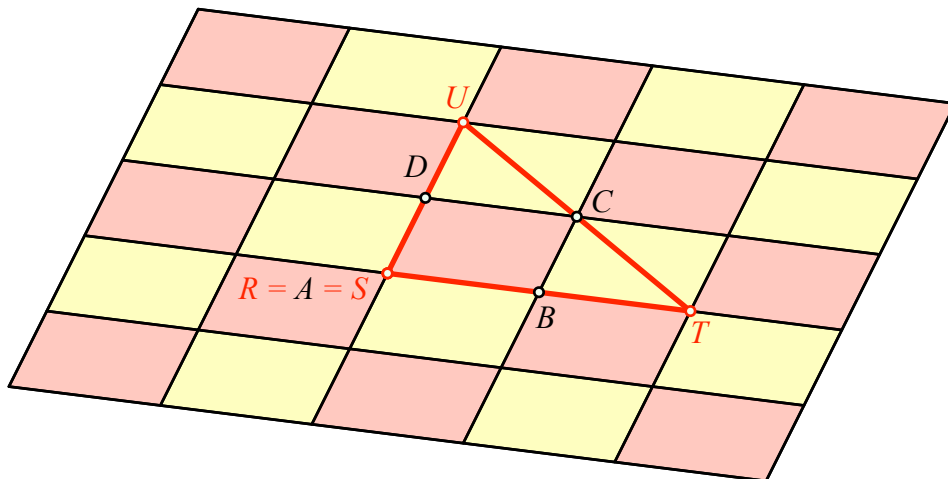
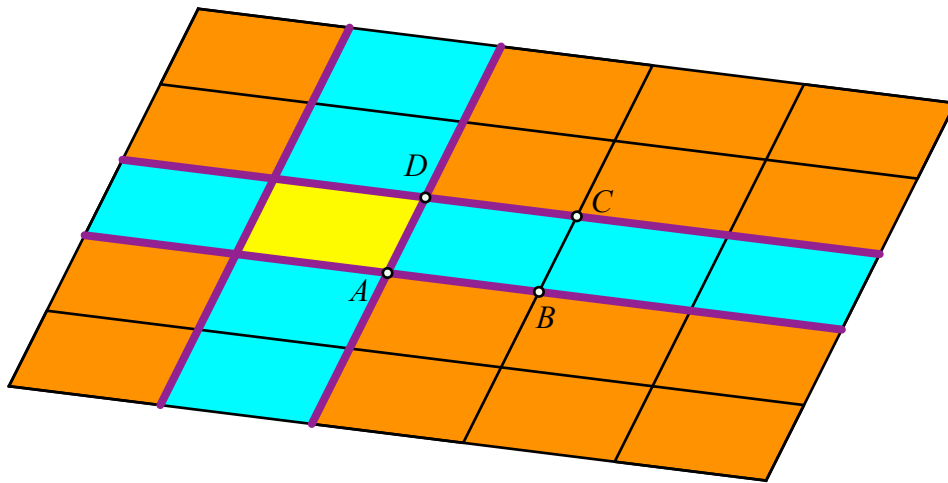


Abb. 8.3: Mehrfachpunkt

## 8 Lösungsübersicht



**Abb. 9: Lösungsübersicht. Position des Startpunktes**

- Startpunkt  $R$  im gelben Bereich: Konvexe Lösung
- Startpunkt  $R$  im hellblauen Bereich: Nichtkonvexe Lösung
- Startpunkt  $R$  im orangen Bereich: Überschlagenes Viereck als Lösung
- Startpunkt  $R$  auf den lila Gitterlinien: Ausgeartete Lösung (Dreieck)

Natürlich stört die asymmetrische Lage des Kreuzes bezüglich des gegebenen Parallelogramms  $ABCD$ . Das hat damit zu tun, dass der Startpunkt  $R$  nur einer der vier Eckpunkte der Lösung ist.

Zwischenbemerkung: Wegen der affinen Invarianz der Thematik hätten wir uns auf ein reguläres Schachbrett mit Quadraten beschränken können.

## 9 Ausblick und Verallgemeinerung

Problemstellung: Gegeben sei ein  $n$ -Eck  $A_0A_1\dots A_{n-1}$ . Indizierung zyklisch modulo  $n$ . Es ist also  $A_n = A_0$ .

Gesucht ist ein Um- $n$ -Eck  $R_0R_1\dots R_{n-1}$  so dass  $A_i$  der Mittelpunkt der Strecke  $R_iR_{i+1}$  ist.

Wir müssen eine Fallunterscheidung bezüglich der Parität von  $n$  organisieren.

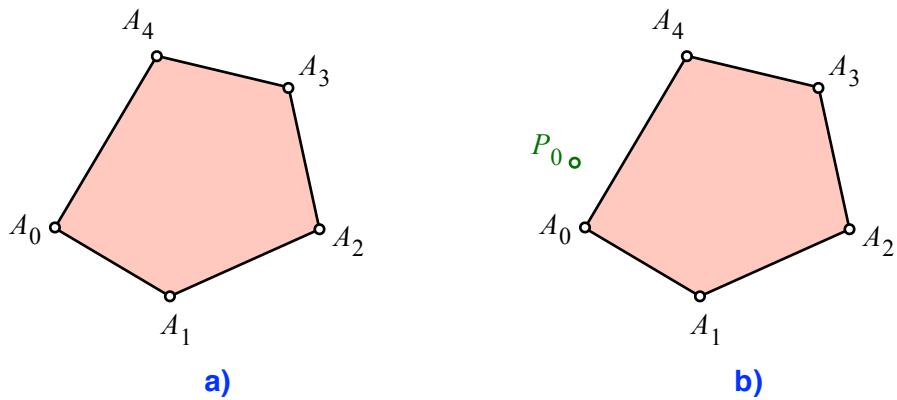
### 9.1 Ungerade Eckenzahl

Für ungerades  $n$  gibt es genau eine Lösung.

Im Folgenden Vorgehen und Beweisskizze für  $n = 5$ .

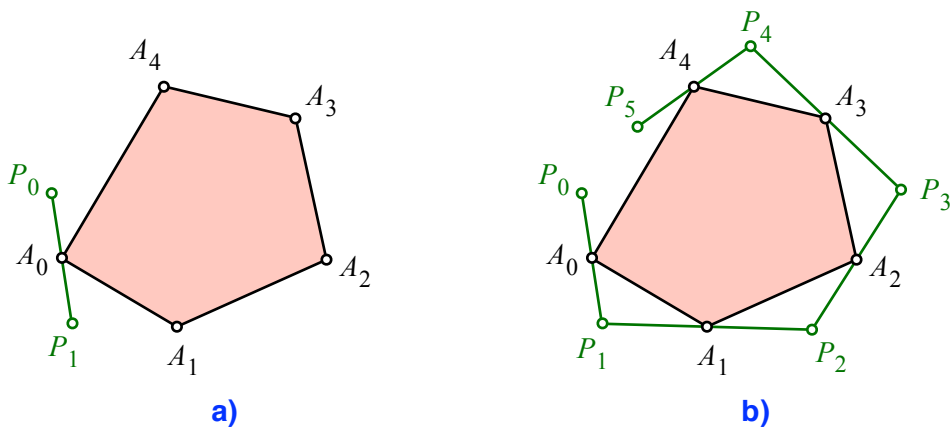
Zum gegebenen Fünfeck  $A_0A_1\dots A_4$  (Abb. 10.1a) wählen wir einen beliebigen Probe-  
punkt  $P_0$  (Abb. 10.1b).





**Abb. 10.1: Fünfeck und Versuchspunkt**

Wir spiegeln den Probestpunkt  $P_0$  an der Ecke  $A_0$  und erhalten den Punkt  $P_1$  (Abb. 10.2a).

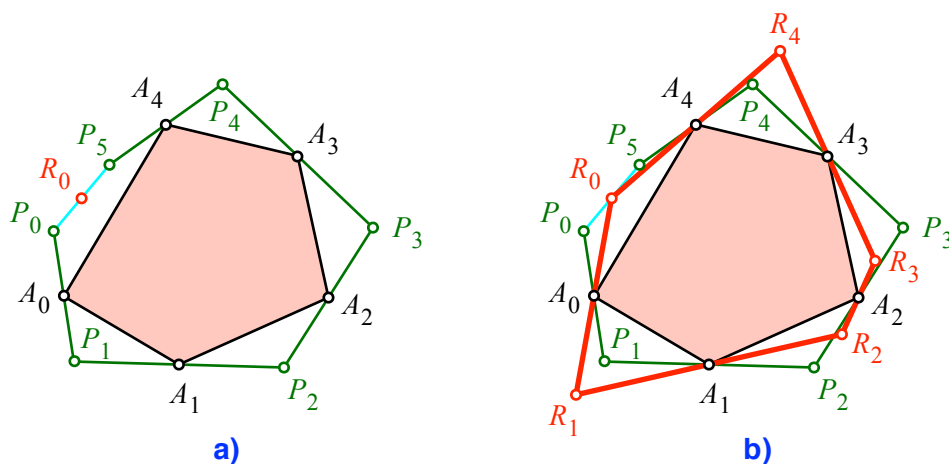


**Abb. 10.2: Durchspiegeln des Probestpunktes**

Dann spiegeln wir weiter und erhalten schließlich den Endpunkt  $P_5$  (Abb. 10.2b). In der Regel fällt  $P_5$  leider nicht mit dem Probestpunkt  $P_0$  zusammen. Wir haben keine Schließungsfigur.

Zwischenbemerkung: Wenn wir weiterspiegeln, also  $P_5$  wieder an  $A_0$ ,  $P_6$  wieder an  $A_1$  und so weiter, wird  $P_{10} = P_0$ . Nach zwei Runden ergibt sich eine Schließungsfigur.

Nun nehmen wir den Mittelpunkt  $R_0$  der Strecke  $P_0P_5$  (Abb. 10.3a). Wenn wir diesen Mittelpunkt durchspiegeln, erhalten wir das gesuchte Um- $n$ -Eck  $R_0R_1\dots R_{n-1}$  (Abb.10.3b).



**Abb. 10.3: Der Mittelpunkt isses**

Beweisskizze: Wir verschieben den Punkt  $P_0$  in Richtung  $P_5$  und spiegeln den Verschiebungsvektor durch. Die Endlage des Verschiebungsvektors ist *gegenläufig* zum anfänglichen Verschiebungsvektor. Dies ist eine Folge davon, dass die Anzahl der Punktspiegelungen ungerade ist. Die Punkte  $P_0$  und  $P_5$  bewegen sich also aufeinander zu und treffen sich in der Mitte.

Eine Zusammensetzung von fünf Punktspiegelungen kann durch eine einzige Punktspiegelung ersetzt werden. In unserem Fall ist deren Zentrum der Punkt  $R_0$ .

Zwischenbemerkung: Wenn wir eine zweite Spiegelungs-Runde anhängen, ergibt sich ein zweites Mal die Punktspiegelung mit dem Punkt  $R_0$  als Zentrum. Die Zusammensetzung einer Punktspiegelung mit sich selber ist aber die Identität. Dies erklärt die Schließungseigenschaft bei zwei Runden.

Im Beispiel der Abbildung 10.3b ist die Lösung konvex. Die Abbildung 11 zeigt eine nichtkonvexe und eine überschlagende Lösung. In beiden Fällen ist das basierende Fünfeck (rot getönt) aber konvex.

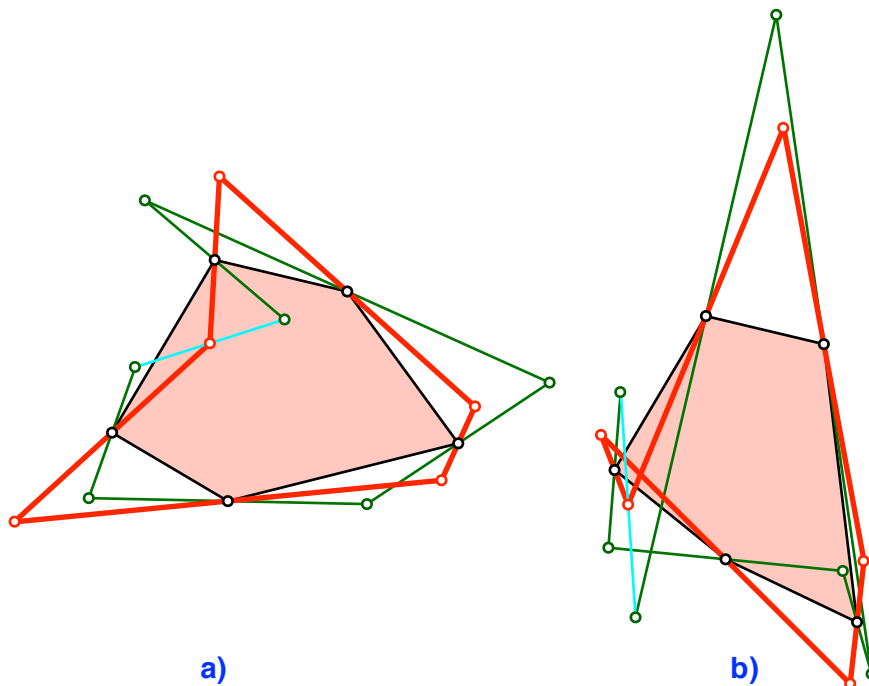


Abb. 11: Nicht konvexe und überschlagene Lösungen

## 9.2 Gerade Eckenzahl

Für gerades  $n$  gibt es entweder keine oder dann gleich unendlich viele Lösungen. Der Regelfall ist, dass es keine Lösung gibt.

Im Folgenden wird exemplarisch der Fall  $n = 6$  besprochen.

Wenn wir analog zur Abbildung 10 einen Probepunkt  $P_0$  reihum durchspiegeln, ist der Endpunkt  $P_6$  in der Regel von  $P_0$  verschieden. Nun verschieben wir wiederum den Probepunkt  $P_0$  in Richtung  $P_6$ . Durchspiegeln des Verschiebungsvektors liefert einen *gleichgerichteten* Vektor. Dies liegt daran, dass die Zusammensetzung einer geraden Anzahl von Punktspiegelungen durch eine Translation ersetzt werden kann. (Der Translationsvektor ist der Vektor von  $P_0$  nach  $P_6$ ). Beim Verschieben von  $P_0$  in Richtung  $P_6$  wendet sich der Punkt  $P_6$  um gleich viel von  $P_0$  weg. Da ist nichts zu wollen.

Zwischenbemerkung: Wenn wir eine zweite Spiegelungs-Runde anhängen, ist der Punkt  $P_{12}$  sogar doppelt so weit von  $P_0$  entfernt als  $P_6$ . Wir erhalten kein geschlossenes Um-vieleck.

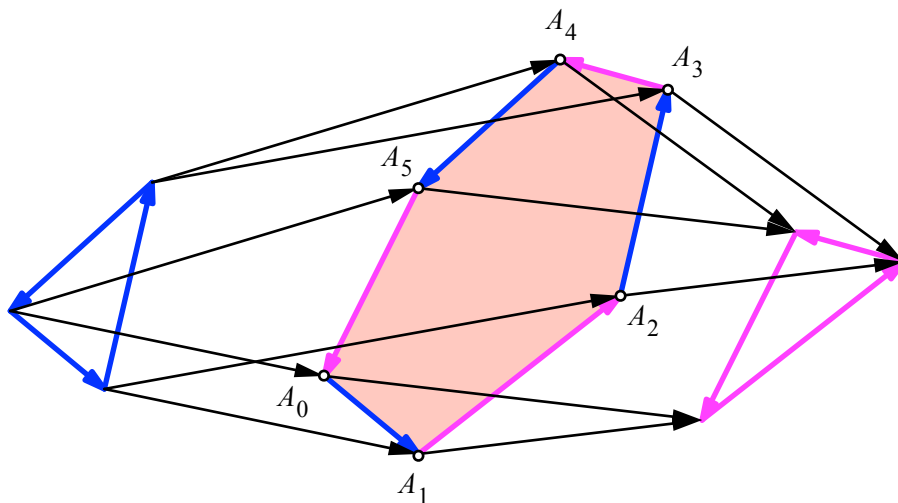
Im Ausnahmefall  $P_6 = P_0$  ist die Translation die Identität. Wir haben in diesem Ausnahmefall eine Schließungsfigur. Es gibt unendlich viele Um- $n$ -Ecke.

Aus den Überlegungen der Abbildung 3b (Strahlensatz) ergibt sich für  $n = 6$  folgende notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorliegen des Ausnahmefalls. Die drei Seitenvektoren  $\overline{A_0A_1}$ ,  $\overline{A_2A_3}$  und  $\overline{A_4A_5}$  (blau in Abb. 12) des Basissechsecks  $A_0A_1\dots A_5$  müssen ein geschlossenes Vektordreieck bilden. Die Zusammensetzung der Translationen mit diesen drei Vektoren ist die Identität. Formal und allgemein:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \overrightarrow{A_{2j}A_{2j+1}} = \vec{0} \quad (1)$$

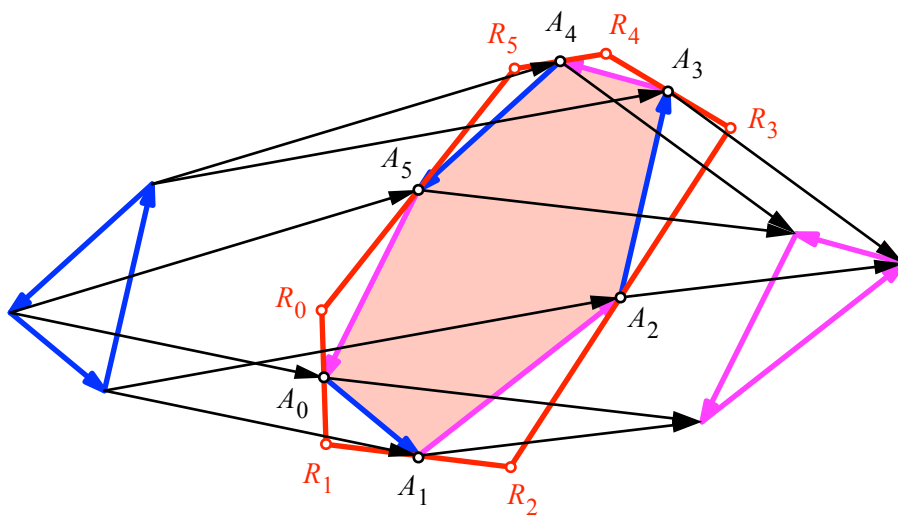
Man beachte, dass die Formel (1) auch das Parallelogramm (für  $n = 4$ ) enthält.

Da das Vektorsechseck geschlossen ist und wegen der Kommutativität der Vektoraddition bilden die drei anderen Seitenvektoren (magenta in Abb. 12) ebenfalls ein geschlossenes Vektordreieck.



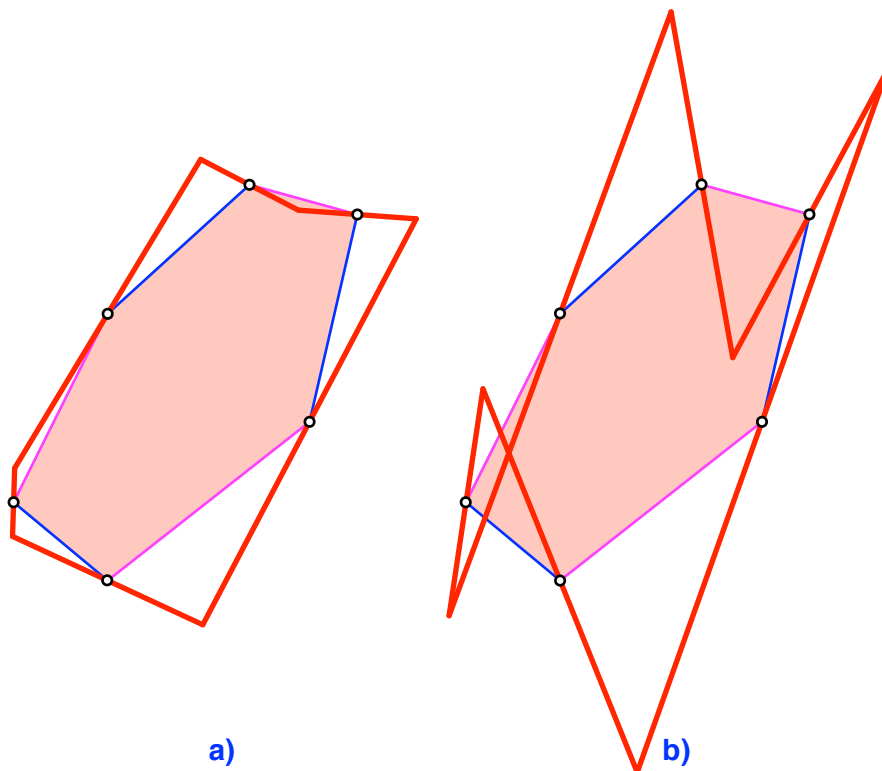
**Abb. 12: Notwendige und hinreichende Bedingung**

Zwischenbemerkung: Die Figur der Abbildung 12 hat die Topologie des Kuboktaeders. Wir können nun einen beliebigen Startpunkt  $R_0$  wählen und erhalten mit Durchspiegeln eine Lösung. Die Abbildung 13 zeigt ein Beispiel.



**Ab. 13: Umsechseck, Beispiel**

Die Abbildung 14 zeigt für dasselbe Basissechsecks  $A_0A_1\dots A_5$  wie bei der Abbildung 13 ein nicht konvexes und ein überschlagenes Umsechseck.



**Abb. 14: Nicht konvexes und überschlagenes Umsechseck**

## Websites

Wikipedia: Pierre de Varignon

[https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre\\_de\\_Varignon](https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Varignon)

Walser Hans: Schließungsfiguren

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Schliessungsfiguren/>