Hans Walser, [20130622]

Anregung: H. M.-S., V.

Verallgemeinerung des Pythagoras

1 Die Verallgemeinerung

Wir gehen aus von zwei gegebenen Punkte A und B und unterteilen die Strecke AB mit dem Teilpunkt S im Verhältnis $1:\lambda$. Auf dem verallgemeinerten Thaleskreis mit Zentrum S durch A wählen wir den Punkt C.

Im Dreieck ABC gilt dann:

$$a^2 + \lambda b^2 = c^2$$

Die Abbildung 1 illustriert den Sachverhalt.

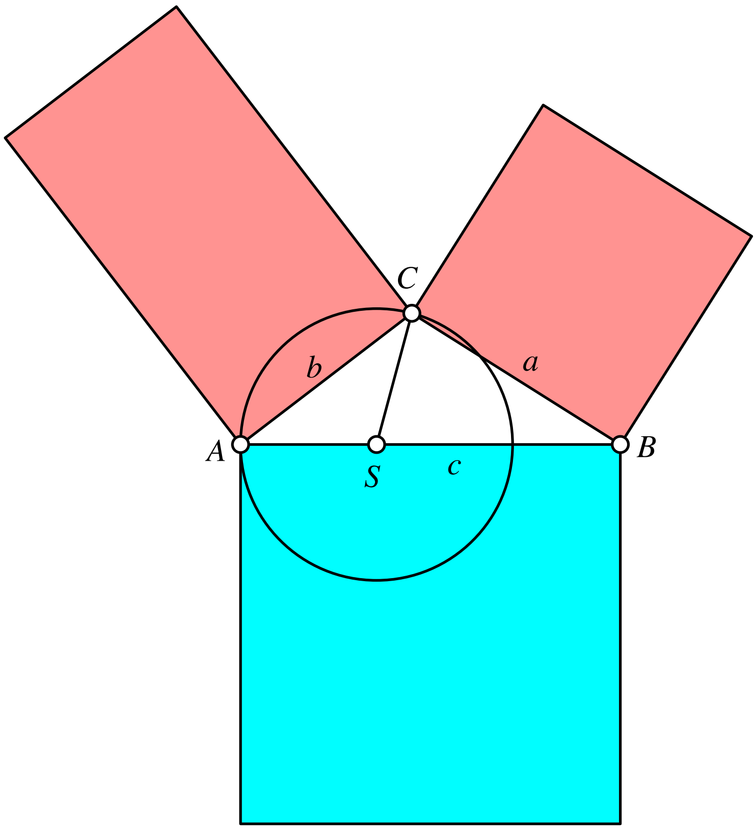

Abb. 1: Verallgemeinerung des Pythagoras

Für $\lambda = 1$ ergibt sich der gewöhnliche Pythagoras.

2 Beweis

Wir arbeiten im Koordinatensystem der Abbildung 2.

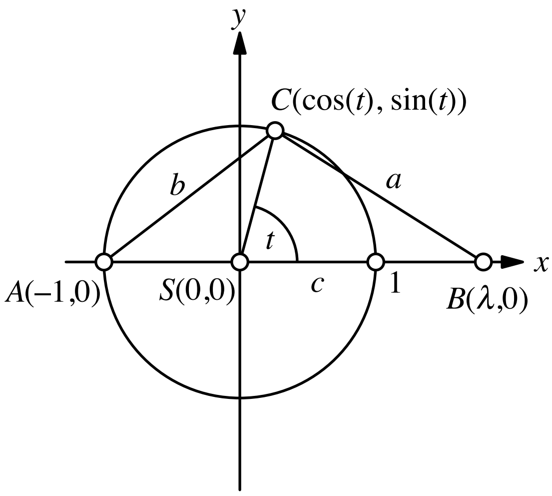

Abb. 2: Bezeichnungen

Es ist:

$$a = \sqrt{\left(\lambda - \cos(t)\right)^2 + \sin^2(t)}$$
$$b = \sqrt{\left(1 + \cos(t)\right)^2 + \sin^2(t)}$$
$$c = 1 + \lambda$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} a^2 + \lambda b^2 &= \left(\lambda - \cos(t)\right)^2 + \sin^2(t) + \lambda\left(\left(1 + \cos(t)\right)^2 + \sin^2(t)\right) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) + \lambda + 2\lambda\cos(t) + \lambda\cos^2(t) + \lambda\sin^2(t) \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = c^2 \end{aligned}$$

3 Konstruktion

Die Abbildung 3 zeigt die Konstruktion. Das Teilverhältnis wird auf die Gerade AC übertragen.

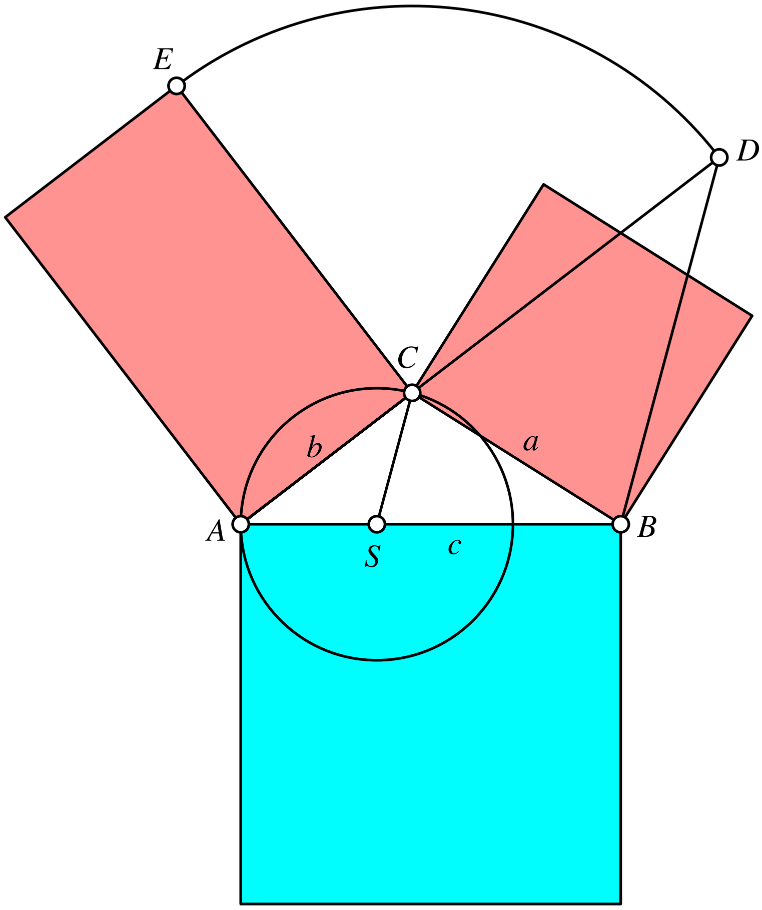

Abb. 3: Konstruktion

4 Offene Fragen

Analoga zu Kathetensatz und Höhensatz?