

Hans Walser, [20170124]

Vergrößern mit dem Goldenen Schnitt

Anregung: Heinz Klaus Strick, Leverkusen

1 Worum geht es?

Wir beginnen mit einem regelmäßigen n -Eck und verlängern die Seiten zyklisch in einer Richtung mit dem Faktor $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (Goldener Schnitt). Die Außenecken verbinden wir zu einem größeren n -Eck. Die Abbildung 1 zeigt das Vorgehen für $n = 3, 4, 5, 6$. Vgl. (Walser 2013, S. 56).

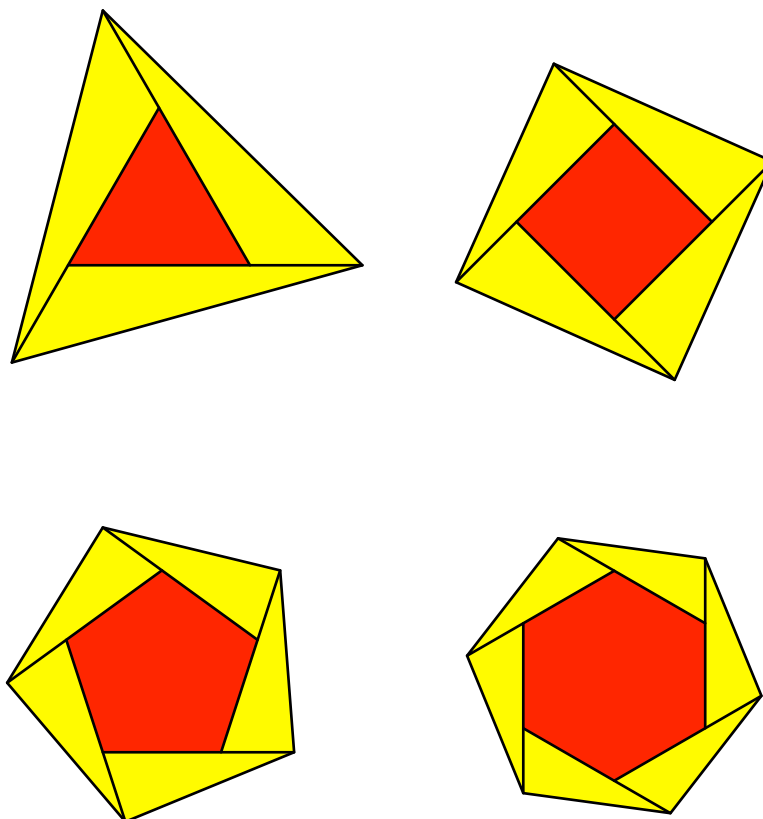


Abb. 1: Vergrößern der Vielecke

2 Flächenzuwachs

Wir fragen, wie sich der gelbe Zuwachs im Vergleich zur roten Ausgangsfläche verhält. Im regelmäßigen n -Eck finden wir mit etwas Rechnung für dieses Verhältnis f_n :

$$f_n = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (1)$$

Die Tabelle 1 zeigt die ersten Werte.

n	f_n	Bemerkungen
3	3	exakt
4	2	exakt
5	1.381966012	$3 - \phi$
6	1	exakt
7	0.7530203968	
8	0.5857864380	$2 - \sqrt{2}$
9	0.4679111136	
10	0.3819660113	$2 - \phi$
11	0.3174929345	
12	0.2679491924	$2 - \sqrt{3}$

Tab. 1: Werte

Die Fälle für $n = 3$ und $n = 4$ dürften bekannt sein. Der schöne Fall $n = 6$ war mir bis anhin nicht bekannt. Wir können also mit dem Goldenen Schnitt die Sechseckfläche verdoppeln.

3 Detail

Unabhängig von n gilt: Ein einzelner Zuwachsspickel ist flächengleich zum Dreieck welches im n -Eck von der kürzesten Diagonale abgeschnitten wird (Abb. 2).

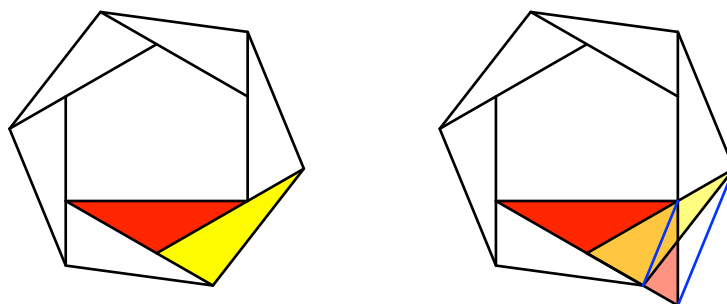


Abb. 2: Flächengleichheit

Der Beweis ergibt sich aus

$$\phi(\phi - 1) = 1 \quad (2)$$

Damit können die „schönen“ Fälle $n = 3, 4, 6$ ohne Rechnung nachgewiesen werden.

4 Quadratwurzel aus 2

Für $n = 6$ hat das große Sechseck den doppelten Flächeninhalt wie das kleine. Damit ist die große Seitenlänge das $\sqrt{2}$ -fache der kleinen Seitenlänge.

Somit haben wir einen Link zwischen dem Goldenen Schnitt und der Zahl $\sqrt{2}$. Vgl. dazu (Walser 2013, S. 13, Abb. 1.1c)

Literatur

Walser, Hans (6. Auflage). (2013). *Der Goldene Schnitt*. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.