Hans Walser, [20150126]

Verhältnisse beim Halbieren

Wir untersuchen das Verhältnis $1:2^n$. Es kommt eine schöne Darstellung im Dualsystem heraus.

Beispiele:

n	Verhältnis	Anteile	Im Dualsystem
0	1:1	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$	$0.1:0.1$
1	1:2	$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$	$0.\overline{01}:0.\overline{10}$
2	1:4	$\frac{1}{5}:\frac{4}{5}$	$0.\overline{0011}:0.\overline{1100}$
3	1:8	$\frac{1}{9}:\frac{8}{9}$	$0.\overline{000111}:0.\overline{111000}$
4	1:16	$\frac{1}{17}:\frac{16}{17}$	$0.\overline{00001111}:0.\overline{11110000}$
$\vdots$			
n	$1:2^n$	$\frac{1}{2^n+1}:\frac{2^n}{2^n+1}$	$0.\overline{\underbrace{0\cdots0}_{\substack{n\\\text{Nullen}}}\;\underbrace{1\cdots1}_{\substack{n\\\text{Einsen}}}}:0.\overline{\underbrace{1\cdots1}_{\substack{n\\\text{Einsen}}}\;\underbrace{0\cdots0}_{\substack{n\\\text{Nullen}}}}$

Das Feld unten rechts ist vorerst nur eine Vermutung.

Wir müssen zeigen:

$$\frac{1}{2^n+1}=0.\overline{\underbrace{0\cdots0}_{\substack{n\\\text{Nullen}}}\;\underbrace{1\cdots1}_{\substack{n\\\text{Einsen}}}}$$

Dazu berechnen wir:

$$\begin{aligned}
0.\overline{\underbrace{0\cdots0}_{\substack{n\\\text{Nullen}}}\;\underbrace{1\cdots1}_{\substack{n\\\text{Einsen}}}}\cdot\left(2^n+1\right)&=0.\overline{\underbrace{0\cdots0}_{\substack{n\\\text{Nullen}}}\;\underbrace{1\cdots1}_{\substack{n\\\text{Einsen}}}}\cdot 1\underbrace{0\cdots0}_{\substack{n-1\\\text{Nullen}}}1\\
&=0.\overline{0\cdots01\cdots1}+0.\overline{1\cdots10\cdots0}\\
&=0.\underbrace{\overline{1\cdots11\cdots1}}_{\substack{2n\\\text{Einsen}}}=0.\overline{1}=1
\end{aligned}$$

Der zweite Teil, nämlich

$$\frac{2^n}{2^n+1} = 0.\overline{\underbrace{1\cdots1}_{\substack{n\\ \text{Einsen}}}\ \underbrace{0\cdots0}_{\substack{n\\ \text{Nullen}}}}$$

ergibt sich durch Ergänzung auf 1.