Hans Walser, [20210716]

Viereck

1 Worum geht es?

Eine Schließungsfigur mit vier ähnlichen Vierecken (Abb. 1). Spiel mit weiteren ähnlichen Vierecken.

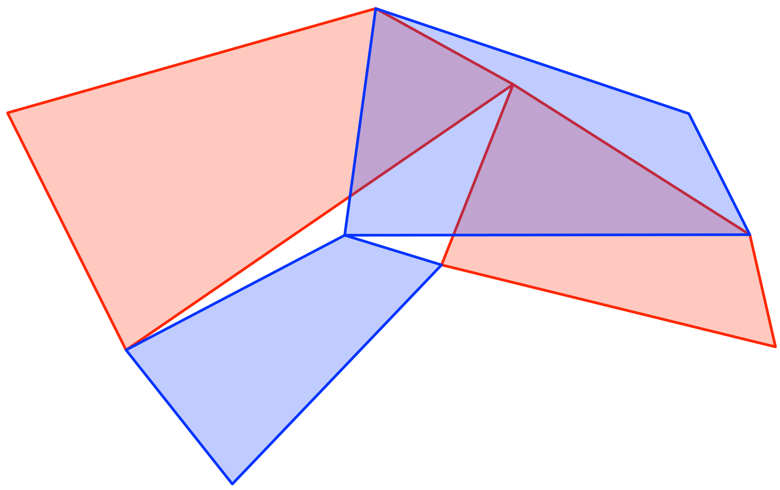

Abb. 1: Schließungsfigur

2 Vorgehen

Wir beginnen mit einem beliebigen Viereck $A_1B_1C_1D_1$ (Abb. 2.1).

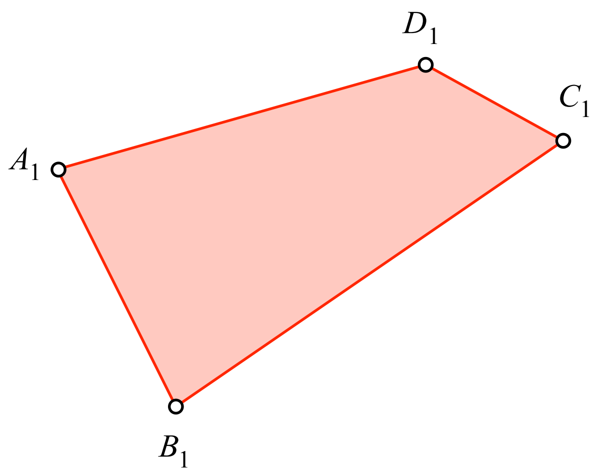

Abb. 2.1: Startviereck

Wir nehmen nun ein zweites, zum ersten ähnliches Viereck $A_2B_2C_2D_2$ und setzen die Ecke A_2 in die Ecke C_1 des ersten Viereckes an (Abb. 2.2). Die beiden Vierecke können an diesem gemeinsamen Gelenkpunkt beliebig verdreht werden.

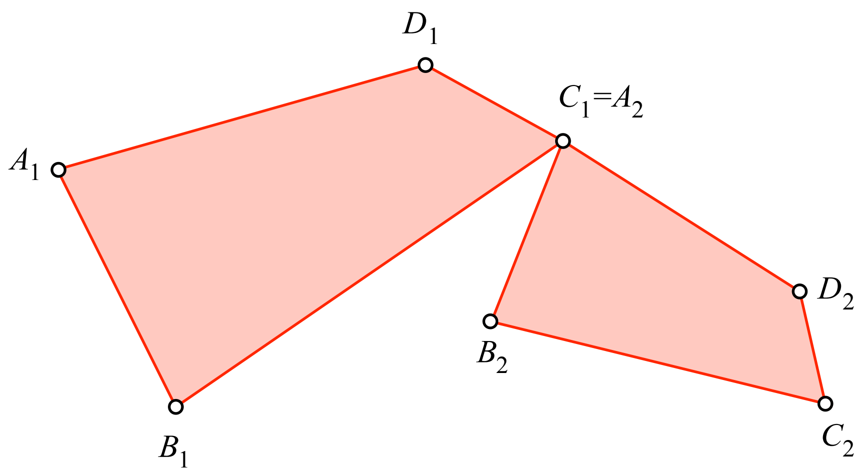

Abb. 2.2: Ansetzen eines zweiten Vierecks

Nun spannen wir ein drittes, ebenfalls ähnliches Viereck $A_3B_3C_3D_3$ so ein, dass $A_3 = B_1$ und $C_3 = B_2$ (blau in Abb. 2.3). Dieses Viereck ist vollständig bestimmt.

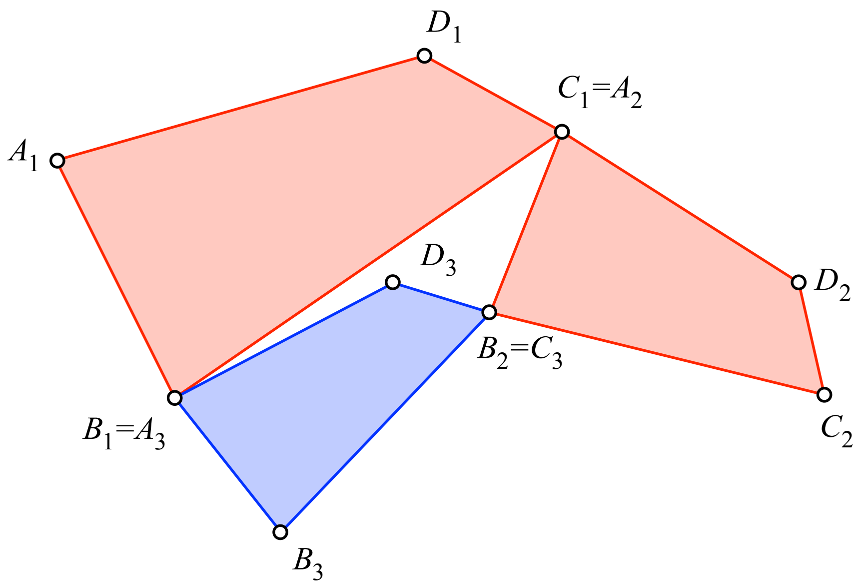

Abb. 2.3: Einspannen eines dritten Vierecks

Schließlich spannen wir ein viertes ähnliches Viereck $A_4B_4C_4D_4$ so ein, dass $A_4 = D_1$ und $C_4 = D_2$ (Abb. 2.4). Auch dieses Viereck ist vollständig bestimmt.

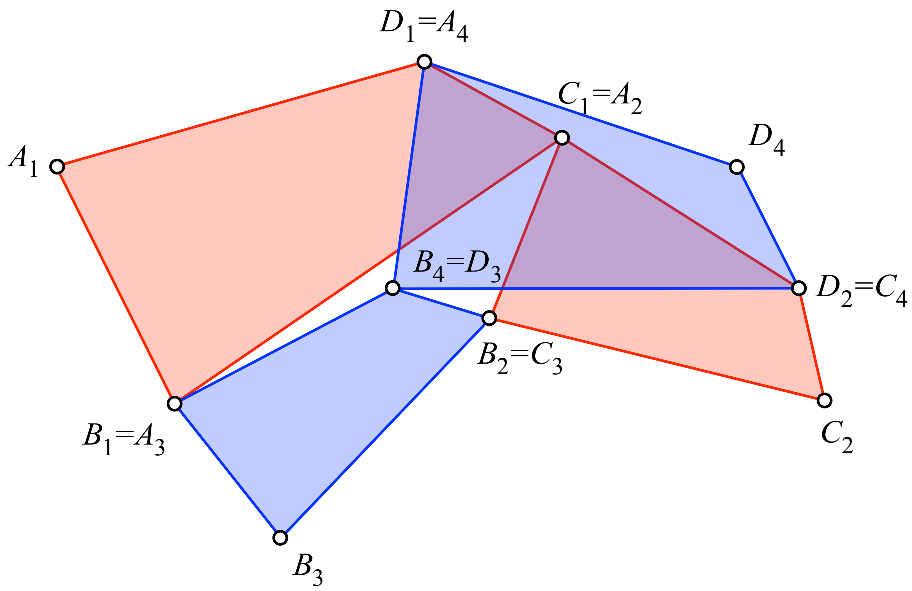

Abb. 2.4: Einspannen eines vierten Viereckes. Schließungsfigur

3 Schließungsfigur

Nun ist $B_4 = D_3$. Wir haben eine Schließungsfigur.

Die Schließungsfigur ist struktursymmetrisch. Wir hätten auch mit den blauen Vierecken beginnen können.

4 Nachweis der Schließungseigenschaft

Wir arbeiten in der Ebene der komplexen Zahlen. Es sei x_i die zu X_i gehörende Zahl. Gegeben sind zunächst die zum ersten Viereck gehörenden Zahlen a_1, b_1, c_1 und d_1. Ebenfalls gegeben ist die komplexe Zahl λ, der Ähnlichkeitsfaktor, um vom ersten Viereck zum zweiten zu kommen. Der Betrag von λ beschreibt den reellen Ähnlichkeitsfaktor, das Argument von λ die Verdrehung. Damit lassen sich alle restlichen Daten bestimmen. Es ist:

$$\begin{aligned} b_2 &= c_1 + \lambda\left(b_1 - a_1\right) \\ d_2 &= c_1 + \lambda\left(d_1 - a_1\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Weiter sind

$$\begin{aligned} \mu &= \tfrac{b_2 - b_1}{c_1 - a_1} \\ \upsilon &= \tfrac{d_2 - d_1}{c_1 - a_1} \end{aligned} \tag{2}$$

die komplexen Ähnlichkeitsfaktoren zwischen dem dritten Viereck und dem ersten Viereck beziehungsweise zwischen dem vierten Viereck und dem ersten Viereck. Damit wird:

$$\begin{aligned} d_3 &= b_1 + \mu\left(d_1 - a_1\right) \\ b_4 &= d_1 + \upsilon\left(b_1 - a_1\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Zu zeigen ist $d_3 = b_4$. Dies folgt mit einiger Rechnung durch Einsetzen von (1) und (2) in (3).

5 Beispiele

5.1 Nicht konvexes Viereck

Die Schließungseigenschaft gilt auch für nicht konvexe Vierecke (Abb. 3).

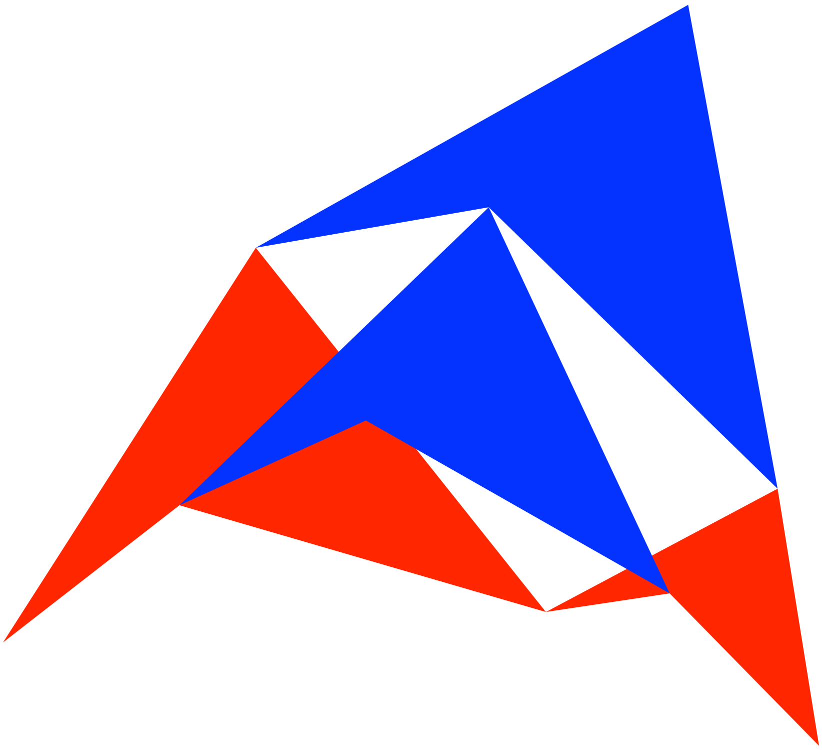

Abb. 3: Nicht konvexes Viereck

5.2 Überschlagenes Viereck

Die Schließungseigenschaft gilt auch bei „überschlagenen" Vierecken (Abb. 4 mit angepasster Färbung).

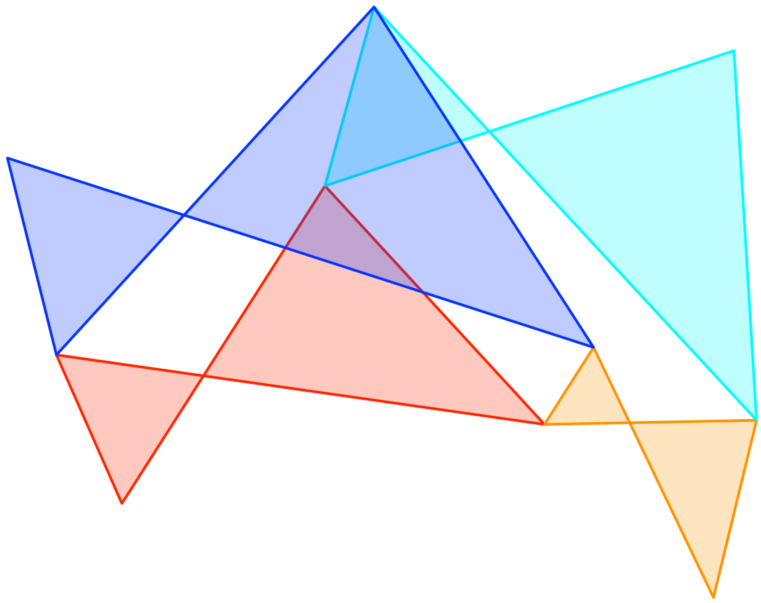

Abb. 4: Überschlagenes Viereck

5.3 Spezielle Punkte im Viereck

Wir nehmen in jedem der vier Vierecke einen besonderen Punkt und bilden das Viereck dieser Punkte.

5.3.1 Diagonalenschnittpunkte

Wir zeichnen in jedem der vier Vierecke den Diagonalenschnittpunkt. Das Viereck der vier Diagonalenschnittpunkte ist ebenfalls ähnlich zu den vier Vierecken (Abb. 5).

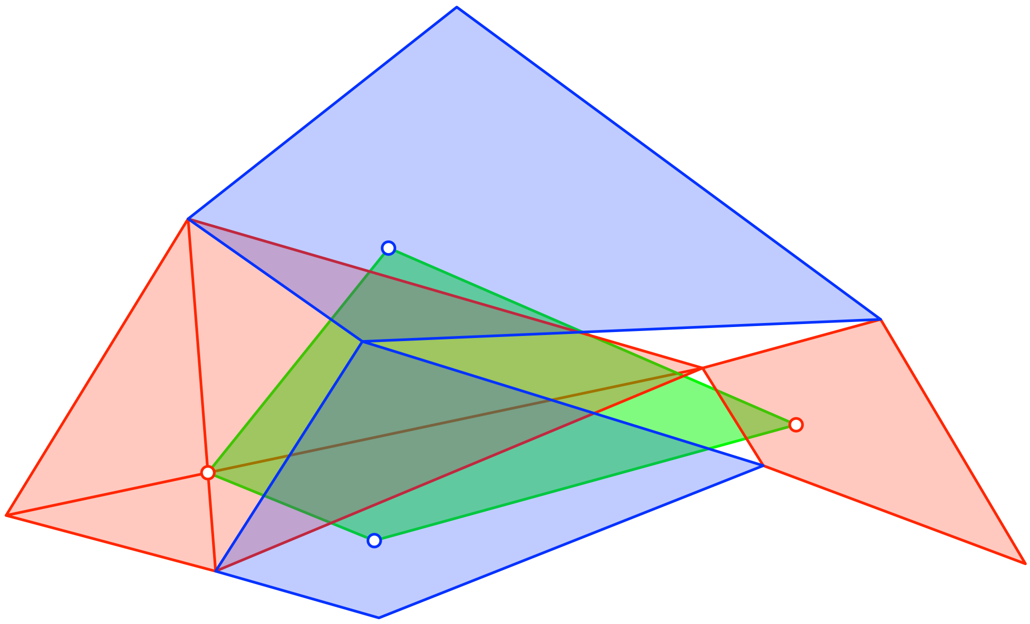

Abb. 5: Diagonalenschnittpunkte-Viereck

5.3.2 Eckenschwerpunkte

Ein Viereck hat verschiedene Schwerpunkte. Die Vorstellung beim *Eckenschwerpunkt* ist eine gleichmäßige Verteilung der Gesamtmasse in den vier Ecken. Die Vorstellung beim *Kantenschwerpunkt* ist eine Verteilung der Gesamtmasse auf vier Kanten im Verhältnis ihrer Länge. Diesen Schwerpunkt habe ich nicht untersucht. Die Vorstellung dem *Flächenschwerpunkt* ist eine homogene Massenverteilung auf der Fläche.

Wir zeichnen in jedem der vier Vierecke den Eckenschwerpunkt. Das Viereck der vier Eckenschwerpunkte ist ebenfalls ähnlich zu den vier Vierecken (Abb. 6).

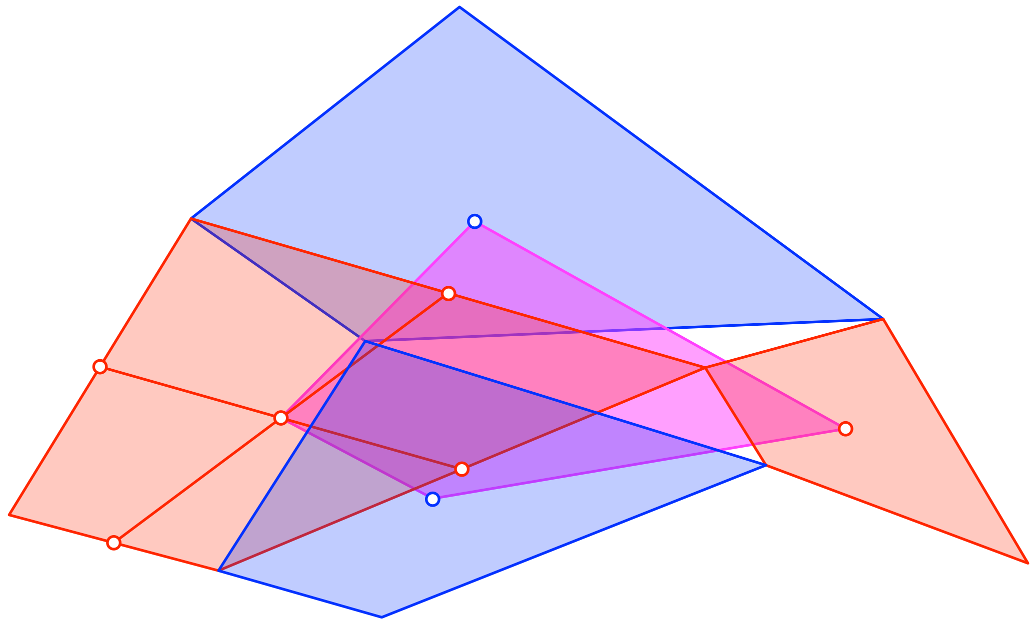

Abb. 6: Eckenschwerpunkte-Viereck

5.3.3 Flächenschwerpunkte

Wir zeichnen in jedem der vier Vierecke den Flächenschwerpunkt. Das Viereck der vier Flächenschwerpunkte ist ebenfalls ähnlich zu den vier Vierecken (Abb. 7).

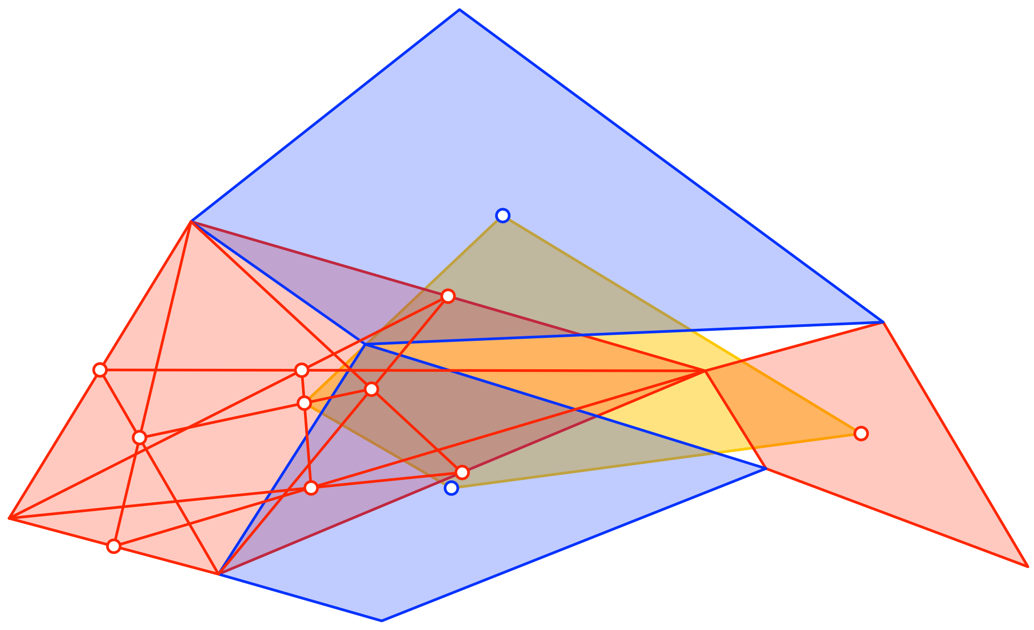

Abb. 7: Flächenschwerpunkte-Viereck

Die Abbildung 8 ist eine Überlagerung der Abbildungen 5, 6 und 7.

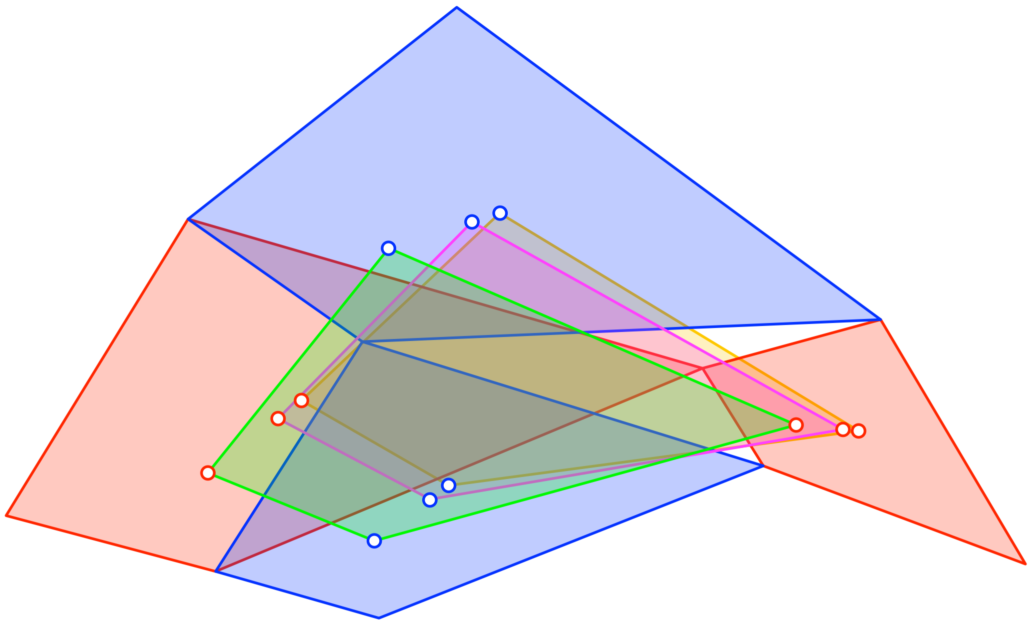

Abb. 8: Überlagerung

Die speziellen Punkte sind verschieden. Sie liegen aber jeweils auf einer Geraden und haben das Teilverhältnis 3:1.

Websites

Hans Walser: Schwerpunkte im Viereck

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Schwerpunkte_Viereck/Schwerpunkte_Viereck.htm