Hans Walser, [20171107]

Viereck mit $d = e = f$

Anregung: Heinz Klaus Strick, Leverkusen

1 Worum geht es?

Von einem Viereck in der üblichen Beschriftung seien die Seiten a, b, c bekannt. Weiter sei $d = e = f$ (e und f seien die beiden Diagonalen). Gesucht ist das Viereck.
Gibt für den allgemeinen Fall eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?

2 Klassisches Beispiel

Das klassische Beispiel ist $a = b = c = 1$ mit den beiden Lösungen (Goldener Schnitt, Abb. 1):

$$d_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \text{ und } d_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618 \tag{1}$$

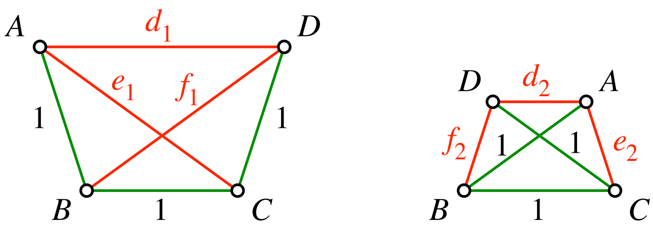

Abb. 1: Klassisches Beispiel

Die zweite Lösung ist „überschlagend“. Die beiden Lösungen sind durch Einbettung in ein reguläres Fünfeck einsehbar (Abb. 2).

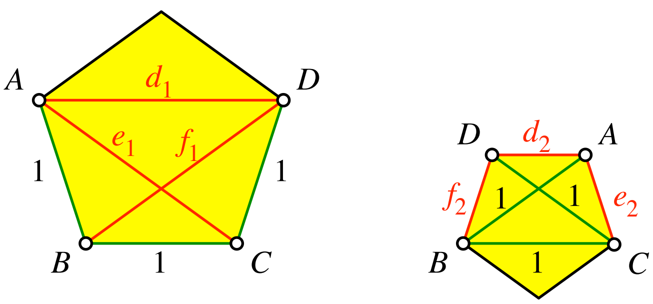

Abb. 2: Zusammenhang mit regulärem Fünfeck

3 Allgemeiner Fall

Im allgemeinen Fall seien die drei gegebenen Seiten *a*, *b*, *c* paarweise verschieden (Abb. 3).

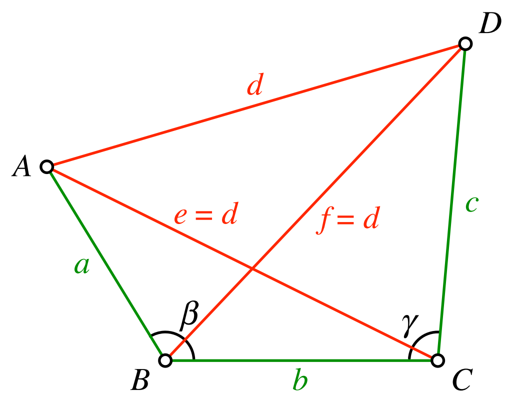

Abb. 3: Allgemeines Beispiel

Es gibt mehrere Lösungswege.

3.1 Rechnerische Lösung

Auf Grund des Kosinussatzes ist im Dreieck *ABC*:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta) \tag{2}$$

Analog im Dreieck *BCD*:

$$d^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\gamma) \tag{3}$$

Für die Seite $d = AD$ ergibt sich nach einiger Rechnung mit Pythagoras:

$$d^2 = \left(b - a\cos(\beta) - c\cos(\gamma)\right)^2 + \left(c\sin(\gamma) - a\sin(\beta)\right)^2 \tag{4}$$

Bei gegebenen *a, b, c* bildet {(2), (3), (4)} ein Gleichungssystem für d, β, γ .

3.2 Einschiebelösung mit Gelenkmodell

Wir denken uns die drei Strecken *a, b, c* in den Punkten *B* und *C* gelenkig verbunden. Weiter seien auf den Strecken *a* und *c* die Mittelsenkrechten montiert (Abb. 4).

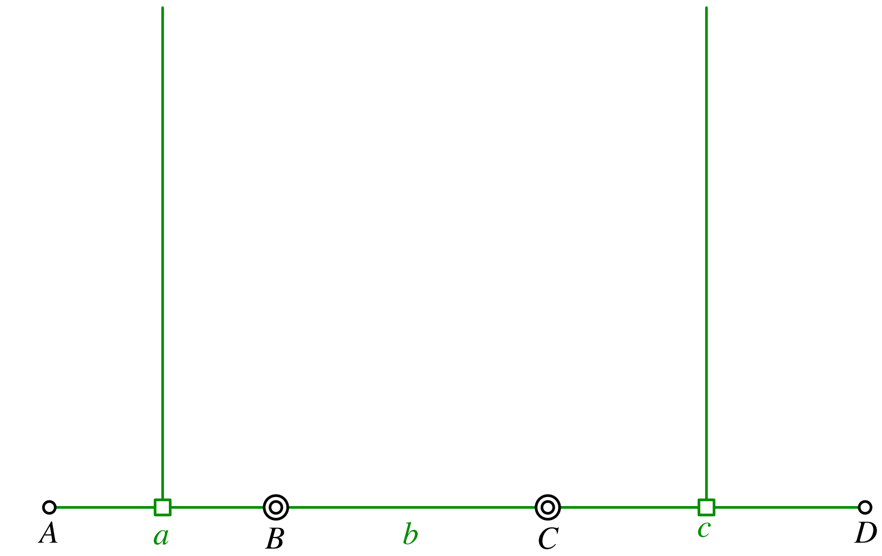

Abb. 4: Gelenkmodell. Ausgangslage

Nun drehen wir die Strecke c um den Punkt C, bis die Mittelsenkrechte von c durch den Punkt A verläuft (Abb. 5).

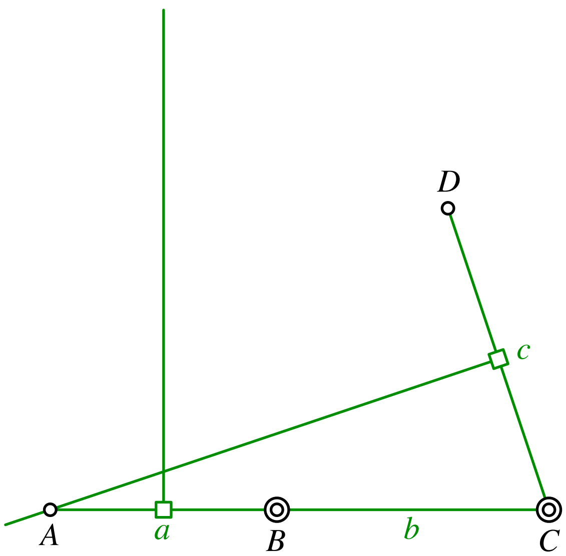

Abb. 5: Erster Schritt

Dieser erste Schritt kann auch mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Jetzt drehen wir die Strecke a mit ihrer Mittelsenkrechten um den Punkt B und nehmen die Mittelsenkrechte von c samt c mit. Die Strecke c wird jetzt also zurückgedreht. Die Abbildung 6 zeigt den Beginn des Zurückdrehens, die Abbildung 7 eine weitere Situation.

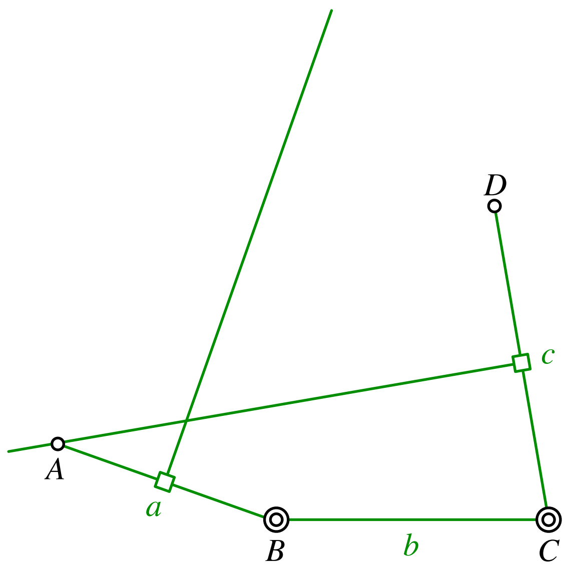

Abb. 6: Beginn des Zurückdrehens

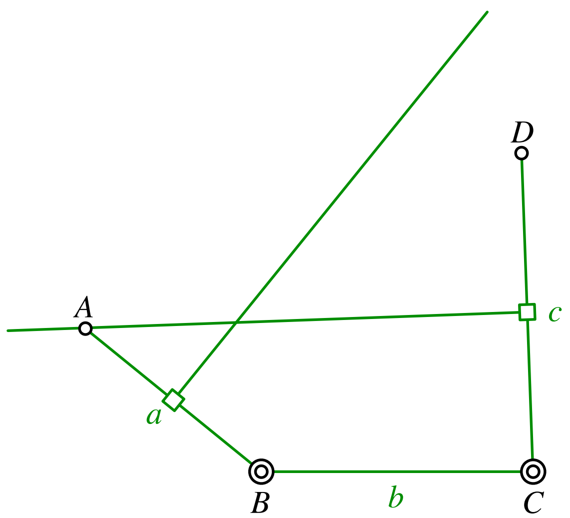

Abb. 7: Weiteres Zurückdrehen

Dieses Zurückdrehen machen wir nun so lange, bis die Mittelsenkrechte von a im Punkt D anstößt (Abb. 8).

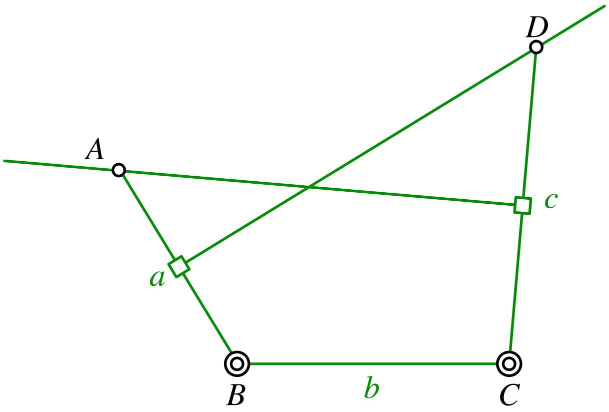

Abb. 8: Anstoßen

Damit haben wir unser Viereck gefunden (Abb. 9).

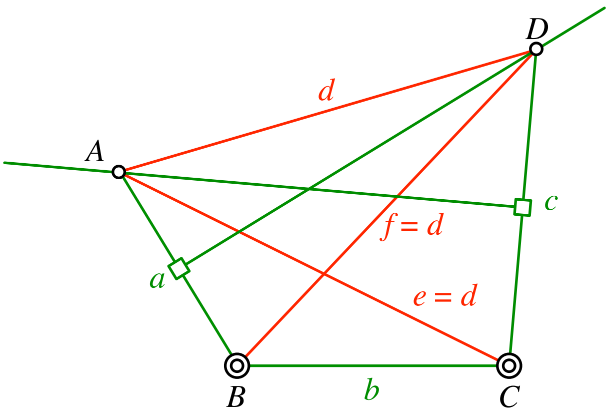

Abb. 9: Lösung

3.3 Zirkel und Lineal?

Ich habe keine Lösung mit Zirkel und Lineal gefunden.

4 Sonderfall

Im Sonderfall $a = c$ ist das Viereck aus Symmetriegründen ein gleichschenkliges Trapez und damit ein Sehnenviereck. Aus dem Satz des Ptolemäus ergibt sich:

$$a^2 + bd = d^2 \tag{5}$$

Bei gegebenen a und b ist dies eine quadratische Gleichung für d. Das Problem kann daher mit Zirkel und Lineal gelöst werden.

Der klassische Fall mit dem Goldenen Schnitt als Lösung gehört zu diesem Sonderfall.