Hans Walser, [20170516]

Viererpuzzle im Raum

1 Worum geht es?

Viererpuzzle in der Ebene sind Figuren mit folgender Eigenschaft: Vier gleichsinnig kongruente Kopien können zu einer Figur zusammengesetzt werden, welche zur Ausgangsfigur gleichsinnig ähnlich ist.

Man kann es auch umgekehrt formulieren: Die Figur kann in vier gleichsinnig kongruente Teilfiguren zerlegt werden, die zur Ausgangsfigur gleichsinnig ähnlich sind.

Die Abbildung 1 zeigt einige Beispiele.

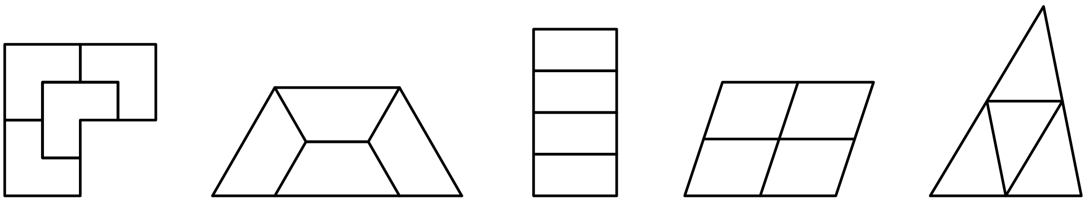


Abb. 1: Beispiele in der Ebene

Die Abbildung 2 zeigt Beispiele, wo es mit der Gleichsinnigkeit nicht stimmt. Die blau markierten Teilfiguren sind gleichsinnig ähnlich zur Endfigur, die rot markierten ungleichsinnig.

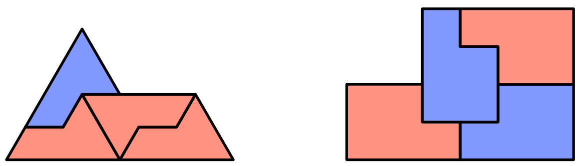


Abb. 2: Ungleichsinnig

Oft wird auf die Gleichsinnigkeit verzichtet. Zu Viererpuzzles in der Ebene siehe (Hemme 1989).

Wir fragen nach Analoga im Raum.

2 Im Raum

Ich habe nur zwei Beispiele gefunden, die erst noch miteinander verwandt sind.

In den Beispielen treten folgende irrationale Schlüsselzahlen auf:

$$\sqrt[3]{2} \approx 1.2599 \qquad \sqrt[3]{4} \approx 1.5874 \qquad \sqrt[3]{16} \approx 2.5198 \tag{1}$$

2.1 Lineare Anordnung. Stapel

Die Abbildung 3a zeigt die Startfigur mit Vermaßung. Die Startfigur ist ein Quader mit dem Seitenverhältnis:

$$1:\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{16}=\left(\sqrt[3]{4}\right)^0:\left(\sqrt[3]{4}\right)^1:\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 \tag{2}$$

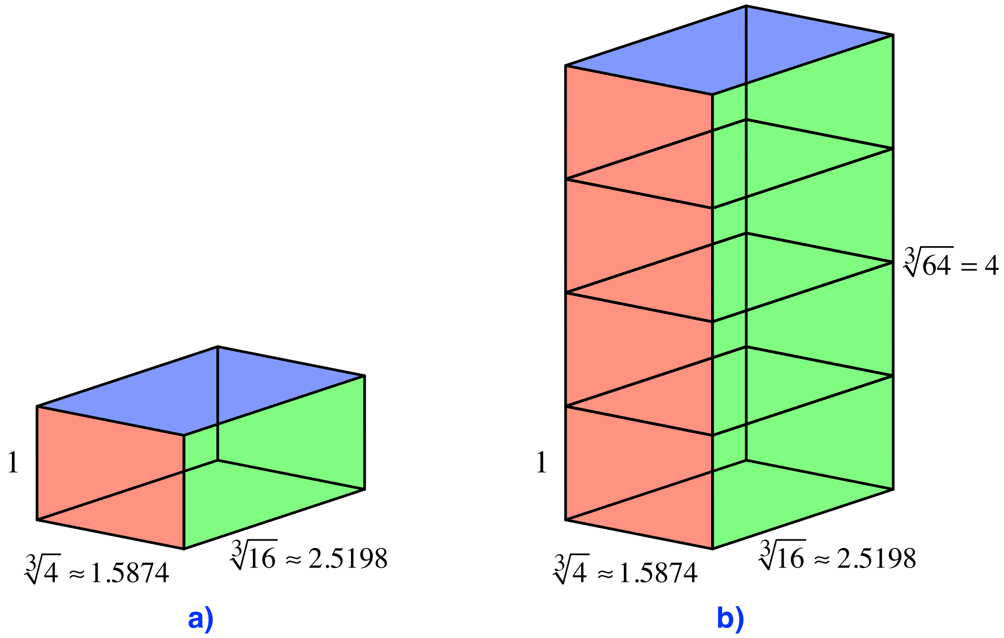


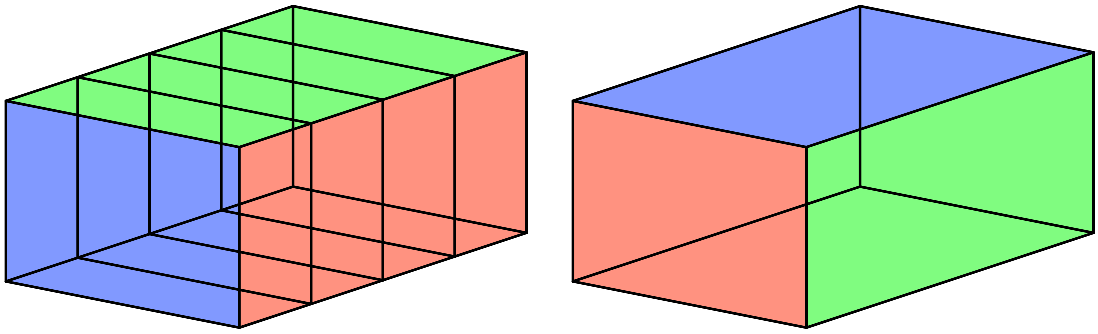
Abb. 3: Quader und Stapel

Die Abbildung 3b zeigt einen Stapel von vier solchen Quadern. Es ist ebenfalls ein Quader. Er hat das Seitenverhältnis:

$$\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{64}=\left(\sqrt[3]{4}\right)^1:\left(\sqrt[3]{4}\right)^2:\left(\sqrt[3]{4}\right)^3 \tag{3}$$

Die Seitenverhältnisse (2) und (3) stimmen überein, wir haben von (2) zu (3) den Erweiterungsfaktor $\sqrt[3]{4}$.

Die Abbildung 4a zeigt den umgelegten Stapel, die Abbildung 4b die mit dem Faktor $\sqrt[3]{4}$ gestreckte Ausgangsfigur der Abbildung 3a. Wir sehen die Ähnlichkeit und die zyklische Farbvertauschung.



a) b)

Abb. 4: Ähnlichkeit

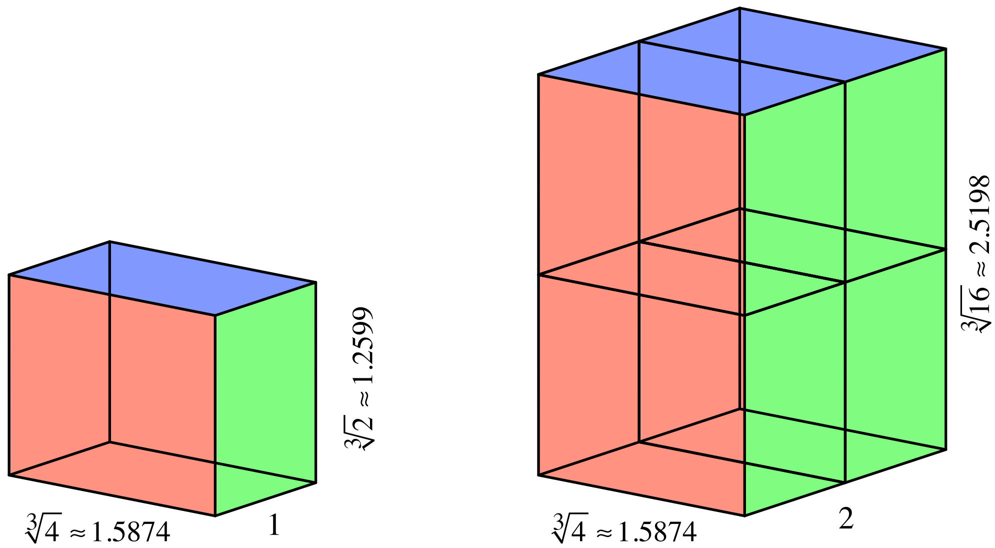
2.2 Doppelstapel

2.2.1 Viererpuzzle

Wegen 2 × 2 = 4 können wir versuchen, einen Stapel mit nur 2 Quadern nochmals zu stapeln. Die Ausgangsfigur der Abbildung 5a ist ein Quader mit dem Seitenverhältnis:

$$1 : \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{4} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^0 : \left(\sqrt[3]{2}\right)^1 : \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \tag{4}$$

Dieser Quader hat also ein anderes Format als der Quader der Abbildung 3a.



a) b)

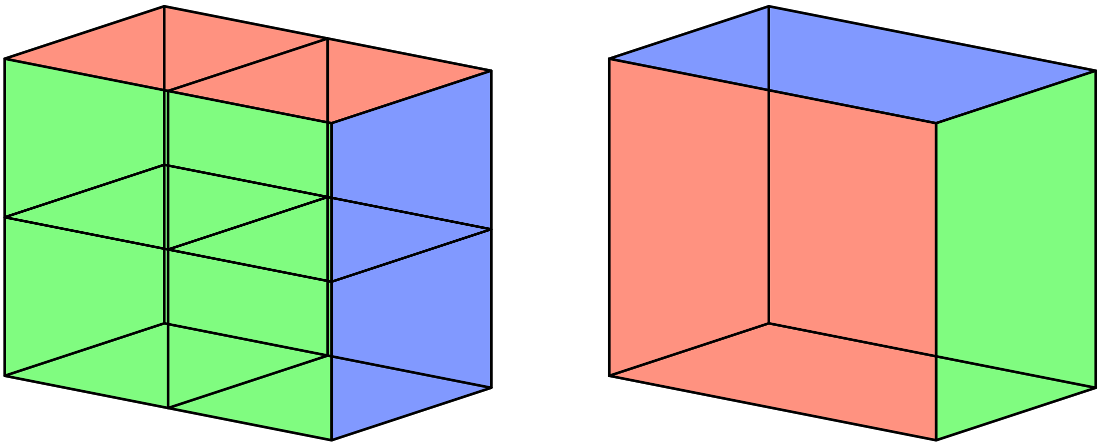
Abb. 5: Doppelstapel

Der Doppelstapel der Abbildung 5b ist ein Quader mit dem Seitenverhältnis:

$$\sqrt[3]{4} : 2 : \sqrt[3]{16} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 : \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 : \left(\sqrt[3]{2}\right)^4 \tag{5}$$

Die Seitenverhältnisse (4) und (5) sind gleich, der Erweiterungsfaktor ist $\sqrt[3]{4} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$.

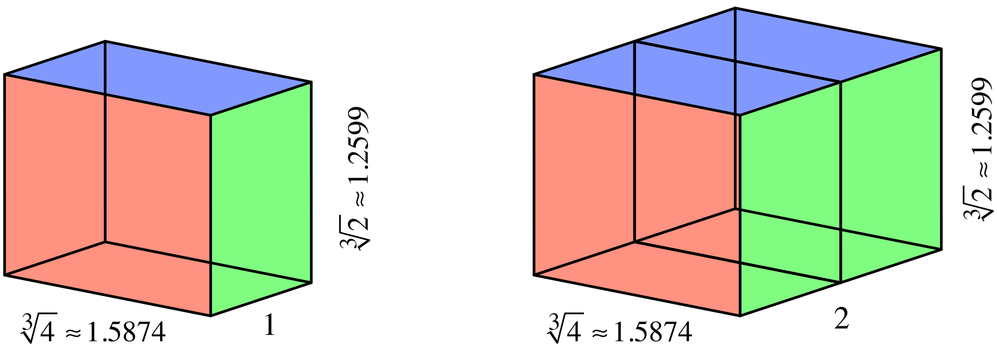
Die Abbildung 6a zeigt den umgelegten Stapel der Abbildung 5b, die Abbildung 6b den mit dem Faktor $\sqrt[3]{4}$ gestreckten Ausgangsquader der Abbildung 5a. Wir sehen die Ähnlichkeit und die zyklische Farbvertauschung.



a) b)

Abb. 6: Ähnlichkeit

2.2.2 Link mit dem DIN-Format



a) b)

Abb. 7: Zweierpuzzle

Die Abbildung 7 zeigt die Situation der Abbildung 5 unter Weglassung der oberen Hälfte beim Stapel.

Der Quader der Abbildung 7b hat das Seitenverhältnis:

$$\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{4} : 2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^1 : \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 : \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \tag{6}$$

Dies ist ebenfalls gleich dem Seitenverhältnis (4) (Erweiterungsfaktor $\sqrt[3]{2}$). Wir haben jetzt allerdings kein Viererpuzzle mehr, sondern nur noch ein Zweierpuzzle. Es handelt sich um das räumliche Analogon zum DIN-Format (Walser 2013, S. 55f).

Für Hinweise auf weitere Lösungen bin ich dankbar.

Literatur

Hemme, Heinrich (1989): Geometrische Gerüchte: Figuren, die sich selbst vervielfachen. bild der wissenschaft, 5-1989. 141-144.

Walser, Hans (2013): DIN A4 in Raum und Zeit. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013. ISBN 978-3-937219-69-1.