Hans Walser, [20160411]

Viviani im Simplex

1 Worum geht es?

Der Satz von Viviani besagt, dass in einem gleichseitigen Dreieck die Summe der drei von einem beliebigen Punkt Lotstrecken zu den Dreieckseiten (Abb. 1) eine Konstante ist, nämlich die Dreieckshöhe (Vargyas und Walser, 2015).

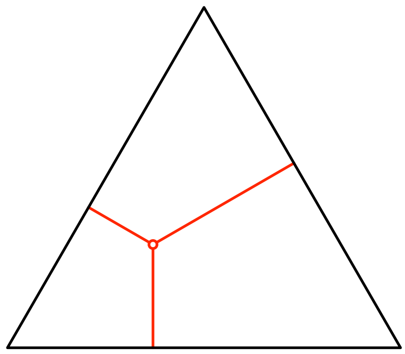

Abb. 1: Der Satz von Viviani in der Ebene

Wir übertragen den Satz in die Dimension n.

2 Beispiele

2.1 Dimension 1

Für eine Strecke ist die Sache trivial (Abb. 2). Die Summe der Abstände von einem Punkt zu den Enden ist die Streckenlänge.

Abb. 2: Unterteilung einer Strecke

2.2 In der Ebene

Der klassische Satz von Viviani in der Ebene kann bewiesen werden wie folgt. Wir zerlegen das gleichseitige Dreieck in drei Teildreiecke. In der Abbildung 3 ist eines dieser Teildreiecke hervorgehoben.

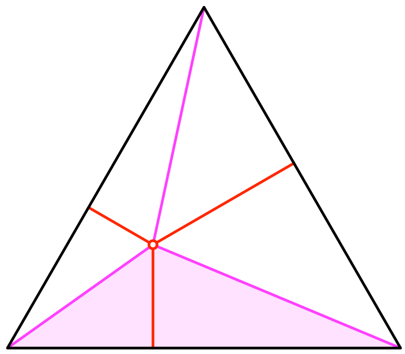

Abb. 3: Teildreiecke

Die Teildreiecke haben eine Seite des Ausgangsdreiecks als Grundlinie und eie Lostrecke als Höhe. Der Flächeninhalt eines Teildreiecks ist also die Hälfte des Produktes der Dreiecksseite mit der Lotstrecke. Die Summe der drei Flächeninhalte ist somit die Hälfte des Produkts der Dreiecksseite mit der Summe der drei Lotstrecken. Andererseits ist das die Gesamtfläche des Dreiecks, also die Hälfte des Produkts der Dreiecksseite mit der Dreieckshöhe.

Somit ist die Summe der drei Lotstrecken gleich der Dreieckshöhe. Dies war zu zeigen.

Wesentlich für den Beweis ist die Gleichheit der Dreiecksseiten. Dies folgt aus der Regelmäßigkeit des Dreiecks.

2.3 Im Raum

Dem gleichseitigen Dreieck in der Ebene entspricht im Raum das regelmäßige Tetraeder.

Von einem Punkt im Innern des Tetraeders aus fällen wir die Lote auf die vier Seitendreiecke (Abb. 4).

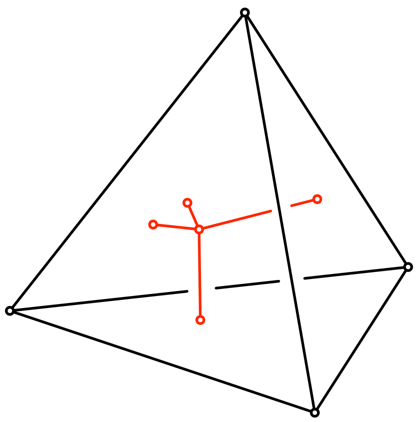

Abb. 4: Summe der Abstände

Der Satz von Viviani im Raum besagt nun, dass die Summe der vier Lotstrecken konstant ist, nämlich gleich der Tetraederhöhe.

Für den Beweis zerlegen das Tetraeder, vom Punkt im Innern ausgehend, in vier Dreikant-Pyramiden mit je einer Seitenfläche des Tetraeders als Grundfläche. Die Abbildung 5 zeigt eine der vier Pyramiden.

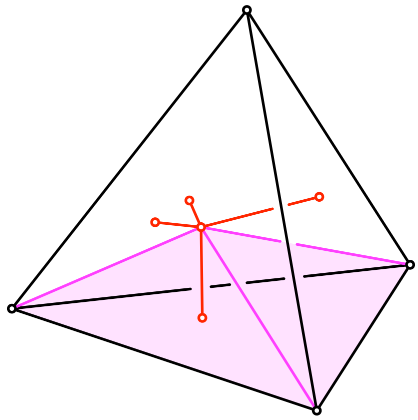

Abb. 5: Pyramide

Die Pyramide hat eine der Lotstrecken als Höhe. Das Volumen ist also ein Drittel des Produktes der Lotstrecke mit der Seitenfläche des Tetraeders. Die Volumensumme der vier Pyramiden ist somit einerseits ein Drittel des Produktes der Summe der Lotstrecken mit der Seitenfläche des Tetraeders. Andererseits ist das aber das gesamte Tetraedervolumen, also ein Drittel des Produktes der Tetraederhöhe mit der Seitenfläche des Tetraeders.

Daher ist die Tetraederhöhe gleich der Summe der vier Lotstrecken. Dies war zu zeigen.

Wesentlich für den Beweis ist die Gleichheit der Seitenflächen. Diese folgt aus der Regelmäßigkeit des Tetraeders.

3 Simplex

Der allgemeine Oberbegriff von Strecke, gleichseitiges Dreieck, regelmäßiges Tetraeder heißt *regelmäßiges Simplex*. Für ein Simplex im n-dimensionalen Raum wird auch die Bezeichnung n-Simplex verwendet. Das Dreieck ist das 2-Simplex, das Tetraeder das 3-Simplex.

Das n-Simplex hat $n+1$ Eckpunkte und $n+1$ den Eckpunkten gegenüberliegende kongruente $n-1$-Simplexe als Hyperseiten.

Von einem Punkt im n-Simplex aus gibt es $n+1$ Lotstrecken zu den Hyperseiten.

Es gilt der Satz von Viviani für regemäßige n-Simplexe: Die Summe der $n+1$ Lotstrecken ist gleich der Höhe des n-Simplexes.

Der Beweis läuft analog zu den Beweisen bei Dreieck und Tetraeder. Wir zerlegen das n-Simplex in $n+1$ Hyperpyramiden mit je einem $n-1$-Simplex als Grundhyperfläche und der Lotstrecke als Höhe. Für die Berechnung des n-Volumens muss mit dem Faktor $\frac{1}{n}$ gearbeitet werden.

Bemerkung: Bei der Kantenlänge 1 hat das n-Simplex die Höhe $\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$. Für unseren Beweis ist das aber irrelevant.

Literatur

Vargyas, Emese und Walser, Hans (2015): Verallgemeinerung des Satzes von Viviani. MI, Mathematikinformation Nr. 63, 15. September 2015. ISSN 1612-9156. S. 3-10.