

Hans Walser, [20180802]

Winkeldrittellung

Idee: Jo Niemeyer, Berlin

1 Worum es geht

Die Winkeldrittellung ist — zusammen mit der Würfelverdoppelung und der Quadratur des Kreises — eines der drei klassischen Probleme, die mit Zirkel und Lineal nicht lösbar sind. Wir besprechen eine Einschiebelösung mit Quadraten oder Rechtecken. Die Lösung ist verwandt mit dem „Tomahawk“-Verfahren.

2 Vorgehen

Wir beginnen mit einem gegebenen Winkel (Abb. 1). Der Winkel soll nicht zu klein sein (über das Vorgehen bei kleinen Winkeln siehe Abschnitt 4).

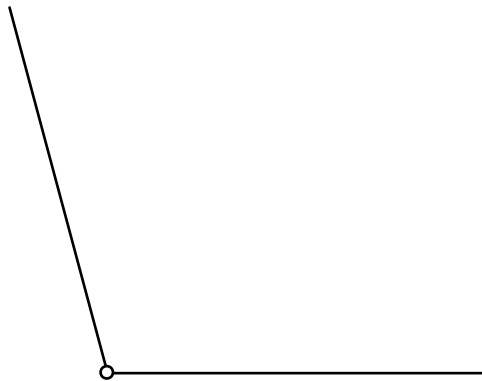


Abb. 1: Der zu dritteln Winkel

Als Hilfsmittel benötigen wir zwei Quadrate aus transparentem Material mit je einer Mittelparallele (Abb. 2). Bei transparentem Papier erhalten wir die Mittelparallele durch Falten.

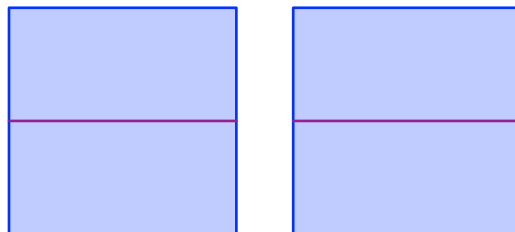


Abb. 2: Zwei transparente Quadrate mit Mittellinie

Wir legen eines der beiden Quadrate an einen der Schenkel an gemäß Abbildung 3. Die Mittellinie des Quadrates ist parallel zum Schenkel.

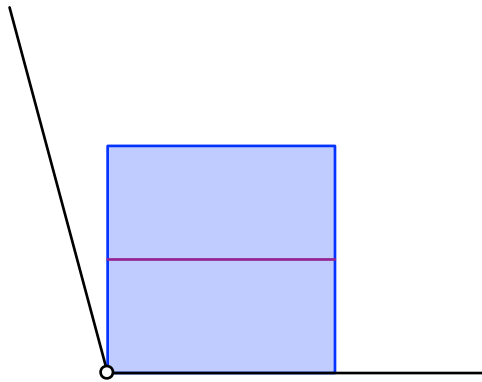


Abb. 3: Anlegen des ersten Quadrates

Das zweite Quadrat schieben wir nun so ein, dass eine Quadratecke auf dem anderen Winkelschenkel liegt, die bezüglich der Mittellinie gespiegelte Quadratecke auf der Mittellinie des ersten Quadrates und die Mittellinie selbst durch den Scheitelpunkt verläuft (Abb. 4).

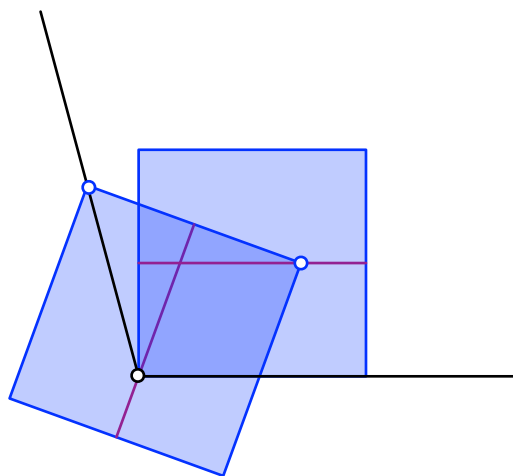


Abb. 4: Einschieben des zweiten Quadrates

Die Mittellinie des zweiten Quadrates ist eine der beiden Winkeldrittungslinien (Abb. 5).

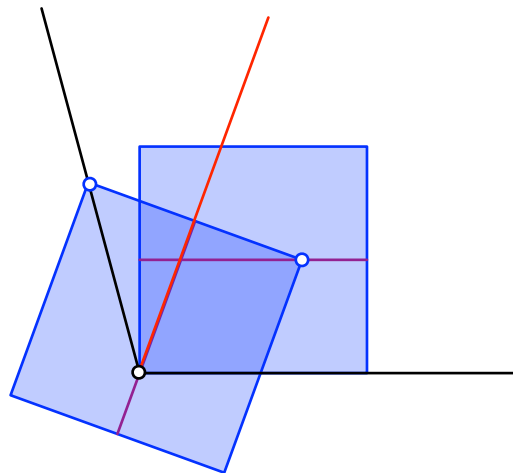


Abb. 5: Die Mittellinie drittelt den Winkel

Die zweite Winkeldrittungslinie finden wir als Verbindungslinie des Scheitels mit dem Einschubepunkt auf der Mittellinie des ersten Quadrates (Abb. 6).

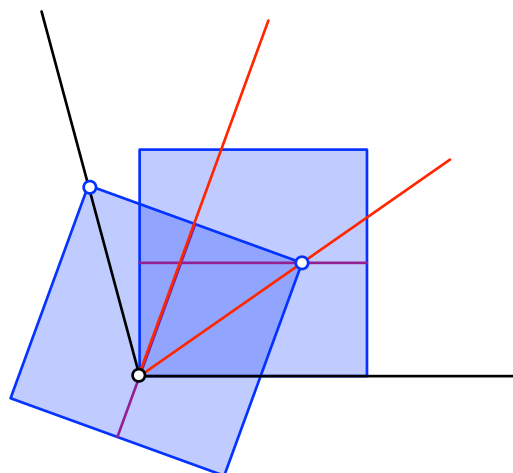
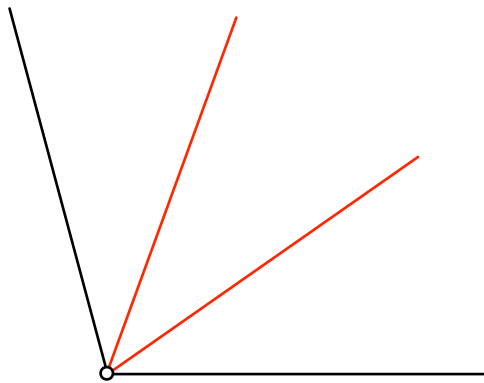


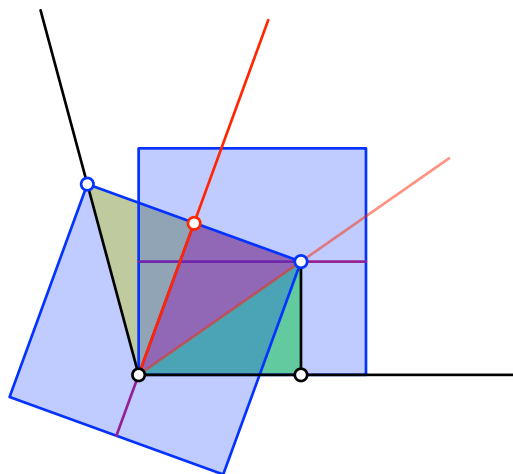
Abb. 6: Zweite Winkeldrittungslinie

Die Abbildung 7 zeigt den gedrittelten Winkel.

**Abb. 7: Gedrittelter Winkel**

3 Beweis der Winkeldrittung

Für den Beweis verwenden wir die drei in die Figur eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecke gemäß Abbildung 8. Diese drei Dreiecke sind kongruent.

**Abb. 8: Beweisfigur**

Das gelbe und das rote Dreieck sind spiegelbildlich und daher kongruent. Das rote und das grüne Dreieck haben je einen rechten Winkel, gleich große (in der Abb. 8 kurze) Katheten (halbe Seitenlänge der Quadrate) und die Hypotenuse gemeinsam. Sie sind daher kongruent. Also sind alle drei Dreiecke kongruent. Am Scheitelpunkt des Ausgangswinkels haben wir nun drei gleiche Winkel.

4 Kleine Winkel

Bei Winkeln kleiner als

$$3\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 79.695^\circ$$

müssen wir mit entsprechend „verlängerten“ Quadraten, also Rechtecken, arbeiten (Abb. 9). Der Beweis geht analog.

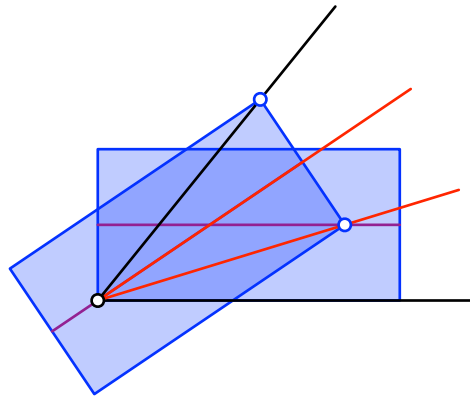


Abb. 9: Winkeldrittung bei kleinen Winkeln

Websites

Hans Walser: Winkeldrittung (Abgerufen 02.08.2018):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung/Winkeldrittung.htm