

Hans Walser, [20190412]

## Winkeldrittung

### 1 Worum geht es?

Winkeldrittung mit Hilfe einer Hundekurve.

### 2 Die Hundekurve

Wir beginnen mit einem Kreis und einem horizontalen Durchmesser (Abb. 1). Auf dem Kreis wählen wir einen beliebigen Punkt.

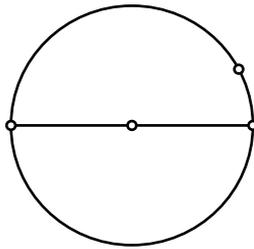


Abb. 1: Kreis, Durchmesser und Punkt

Vom linken Ende des Durchmessers zeichnen wir einen Strahl durch den Kreispunkt und tragen den Kreisradius ab (Abb. 2).

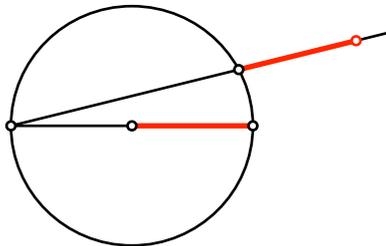
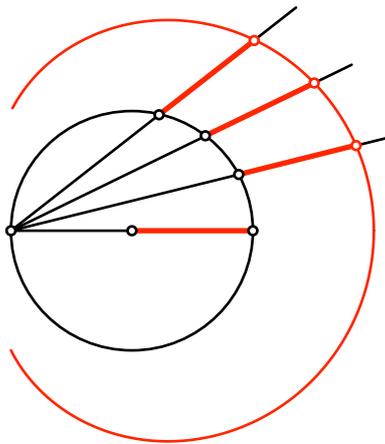


Abb. 2: Kreisradius abtragen

Wir generieren nun die Ortskurve der roten Endpunkte (Abb. 3).

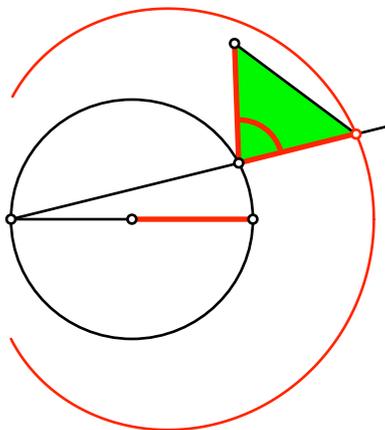
Diese Ortskurve ist eine Hundekurve. Madame de Meuron geht mit Fiffy an der roten Leine auf dem Kreis spazieren. Fiffy hat Angst vor dem linken Ende des Durchmessers.

Diese Ortskurve ist offensichtlich *kein* Kreis. Über seine Darstellung werden wir uns später unterhalten.

**Abb. 3: Ortskurve**

### 3 Der Winkel kommt ins Spiel

Nun hat Madame de Meuron noch einen zweiten Hund Fuffy an einer gleich langen Leine. Fuffy achtet darauf, dass er von Fiffy immer einen gleichen Winkelabstand hat. So entsteht ein gleichschenkliges Dreieck mit Madame de Meuron an der Spitze und dem durch Fuffy festgelegten Winkel als Spitzenwinkel (Abb. 4).

**Abb. 4: Gleichschenkliges Dreieck**

Der zweite Basispunkt des gleichschenkligen Dreiecks, also die Position von Fuffy, kann je nach Position von Madame de Meuron innerhalb (Abb. 4), auf (Abb. 5) oder außerhalb (Abb. 6) der Ortskurve sein.

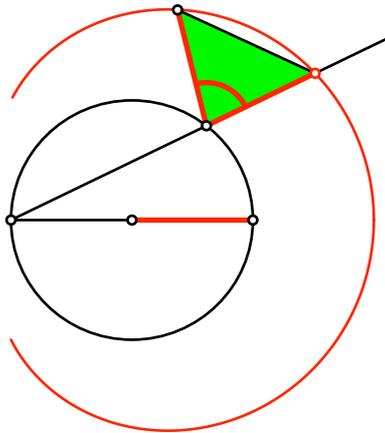


Abb. 5: Fuffy auch auf der Ortskurve

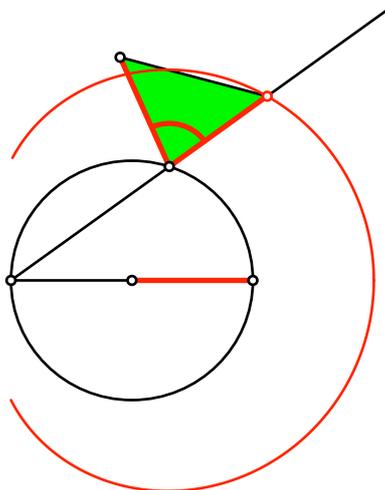


Abb. 6: Fuffy außerhalb der Ortskurve

#### 4 Eingepasstes Dreieck

Interessant ist der Sonderfall der Abbildung 5. Das gleichschenklige Dreieck ist so in die Figur eingepasst, dass die Spitze (Madame de Meuron) auf dem Kreis liegt und die beiden Basispunkt (Fifty und Fuffy) auf der Ortskurve.

In dieser Situation drittelt der vom Kreismittelpunkt ausgehende Strahl durch die Dreiecksspitze den Dreieckswinkel (Abb. 7).

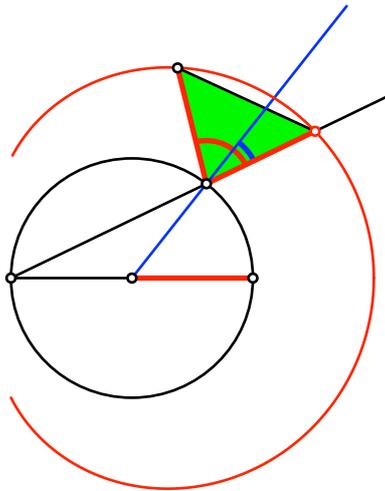


Abb. 7: Winkeldrittung

## 5 Warum ist das so?

Wir arbeiten im Koordinatensystem der Abbildung 8.

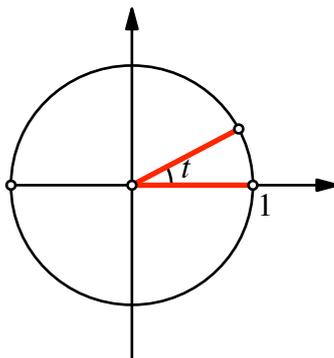


Abb. 8: Disposition

Der Kreis hat die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Das gelb markierte Dreieck (Abb. 9) ist gleichschenkelig und hat an der Spitze den Außenwinkel  $t$ . Die beiden Basiswinkel sind daher je  $\frac{t}{2}$ .

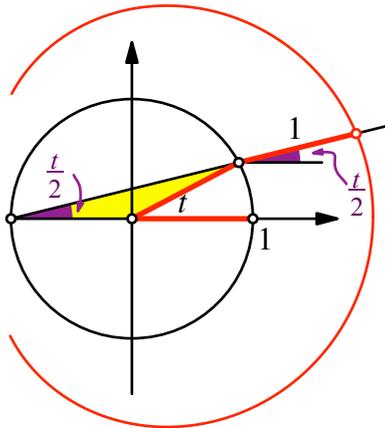


Abb. 9: Ortskurve

Daraus ergibt sich für den roten Punkt und damit für die Ortskurve die Darstellung:

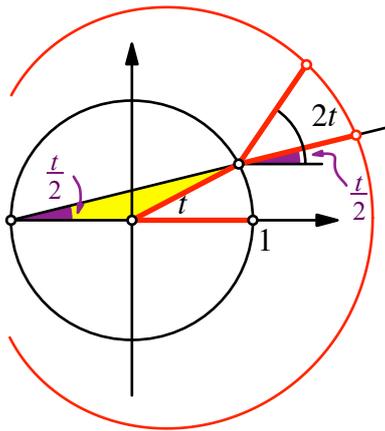
$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Dieselbe Kurve kann aber auch dargestellt werden durch:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Wir kommen von (2) zu (3) durch Vertauschen der beiden Summanden und einer Parametertransformation. (Dies ist die Schlüsselstelle des Beweises.)

Für denselben Parameterwert  $t$  erhalten wir einen anderen Punkt auf der Ortskurve (Abb. 10). Wir erkennen die beiden Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks.

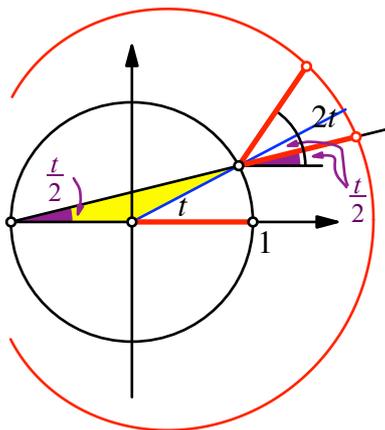


**Abb. 10: Zweiter Punkt auf der Ortskurve**

Der Winkel zwischen den beiden Schenkeln (der Spitzenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks) ist:

$$2t - \frac{t}{2} = 3\frac{t}{2} \tag{4}$$

Da der Winkel zwischen dem einen Schenkel und dem blauen Strahl (Abb. 11)  $\frac{t}{2}$  beträgt, haben wir eine Winkeldrittung.



**Abb. 11: Winkeldrittung**

## **Weblinks**

Hans Walser: Winkeldrittung

[www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung/Winkeldrittung.htm](http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung/Winkeldrittung.htm)

Hans Walser: Winkeldrittung

[www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung2/Winkeldrittung2.htm](http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung2/Winkeldrittung2.htm)

Hans Walser: Winkeldrittung

[www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung3/Winkeldrittung3.htm](http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung3/Winkeldrittung3.htm)