Hans Walser, [20190911]

Winkeldrittelung mit Lemniskate

Anregung: J. L., F.

1 Worum geht es?

Die Lemniskate von Bernoulli liefert ein Einschiebe-Verfahren zur Winkeldrittelung. Die Lemniskate ist eine „liegende Acht“ (Abb. 1).

2 Vorgehen

In eine Lemniskate zeichnen wir den zu drittelnden Winkel ein gemäß Abbildung 1.

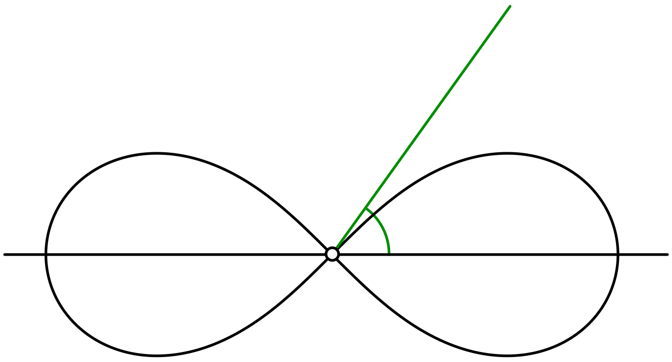

Abb. 1: Lemniskate und Winkel

Zum zweiten Schenkel des Winkels zeichnen wir eine Normale (Abb. 2).

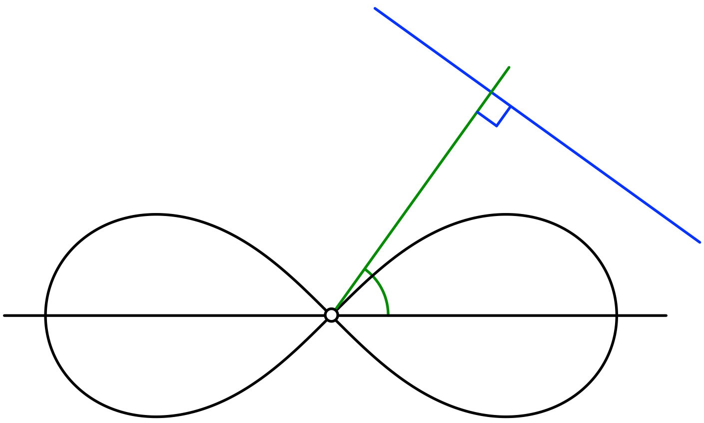

Abb. 2: Normale

Wir verschieben die Normale, bis sie die Lemniskate berührt (dies ist das „Einschieben“, Abb. 3).

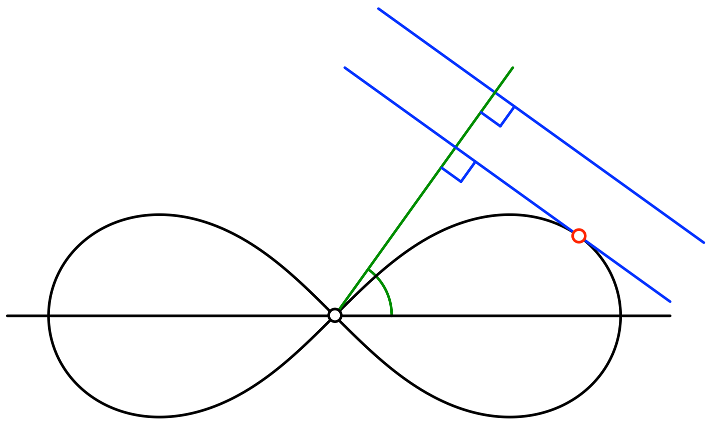

Abb. 3: Verschieben bis zur Berührung

Mit dem Berührungspunkt ergibt sich der Drittelwinkel (Abb. 4).

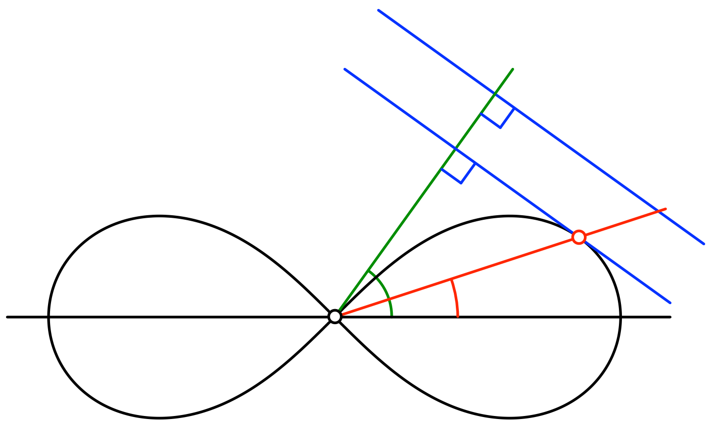

Abb. 4: Drittelwinkel

3 Beweis

Wir haben die Stimmigkeit der Figur der Abbildung 5 zu zeigen.

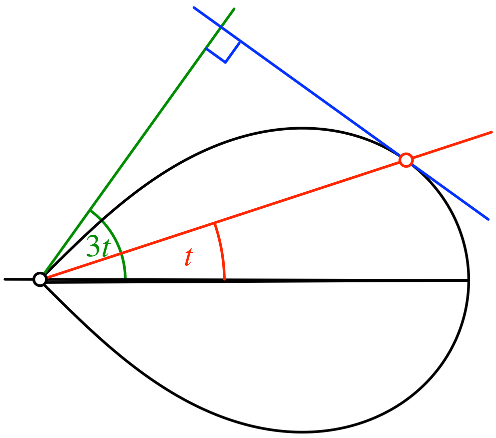

Abb. 5: Was zu zeigen ist

Die Lemniskaten-Schleife der Abbildung 5 hat die Polargleichung:

$$r(t) = \sqrt{2\cos(2t)}, \quad t \in \left[-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right] \tag{1}$$

Daraus ergibt sich die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) = \sqrt{2\cos(2t)} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \tag{2}$$

Für den Tangentialvektor erhalten wir (die Additionstheoreme sind immer wieder gut):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \frac{-2\sin(2t)}{\sqrt{2\cos(2t)}} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + \sqrt{2\cos(2t)} \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\cos(2t)}} \begin{bmatrix} -\sin(2t)\cos(t) - \cos(2t)\sin(t) \\ -\sin(2t)\sin(t) + \cos(2t)\cos(t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\cos(2t)}} \begin{bmatrix} -\sin(3t) \\ \cos(3t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

Dieser Vektor (3) ist orthogonal zum Vektor (4):

$$\begin{bmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Der Vektor (4) ist aber der Richtungsvektor des zweiten Schenkels des Winkels $3t$. Damit ist der Sachverhalt bewiesen.

4 Sonderfall

Die Hoch- und Tiefpunkte der Lemniskate definieren zusammen mit dem Zentrum gleichseitige Dreiecke (Abb. 6).

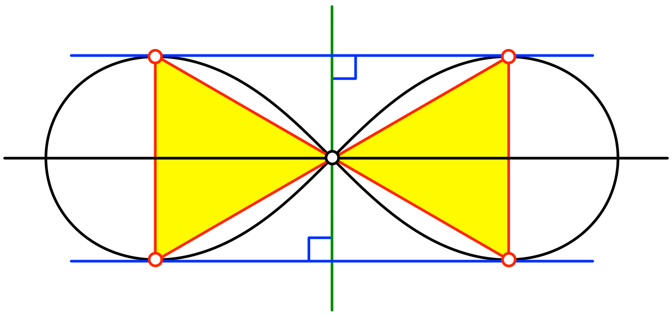

Abb. 6: Gleichseitige Dreiecke

5 Winkelhalbierung

Was geschieht, wenn wir die Lemniskate durch einen Doppelkreis ersetzen (Abb. 7)? Das ist ja auch eine „liegende Acht“.

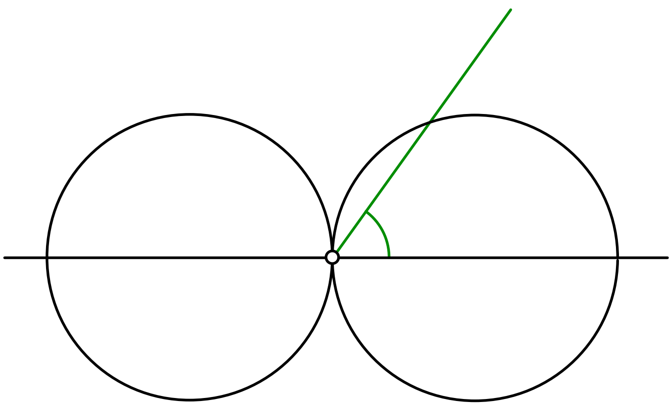

Abb. 7: Doppelkreis

Zum zweiten Schenkel des Winkels zeichnen wir eine Normale (Abb. 8).

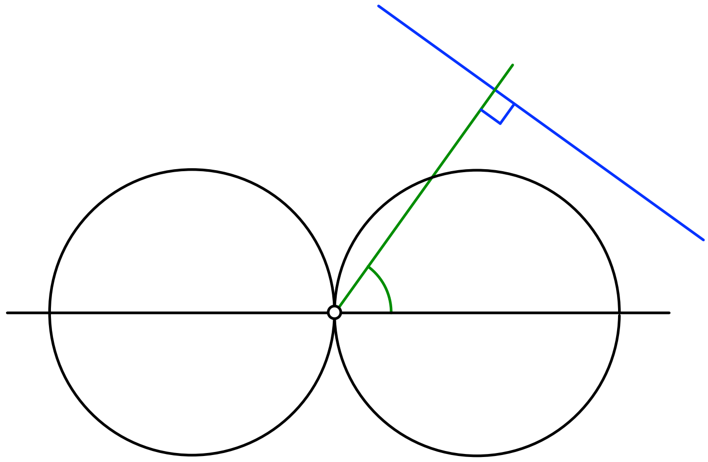

Abb. 8: Normale

Wir verschieben die Normale, bis sie den Doppelkreis berührt (Abb. 9).

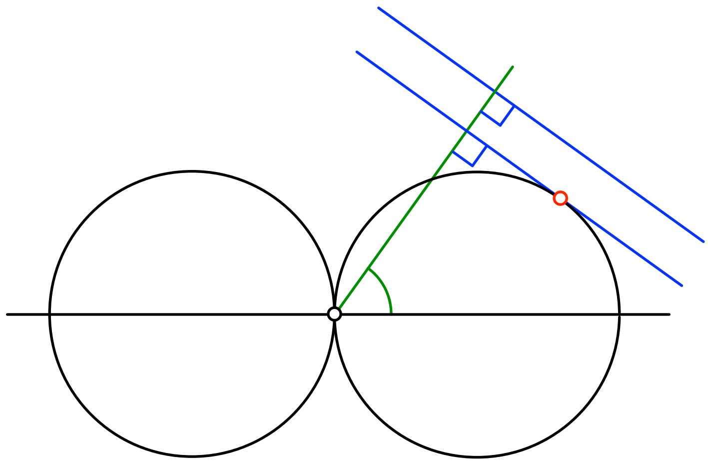

Abb. 9: Verschieben bis zur Berührung

Mit dem Berührungspunkt ergibt sich ein halber Winkel (Abb. 10).
(Der Autor gesteht, dass es auch einfachere Methoden gibt, einen Winkel zu halbieren.)

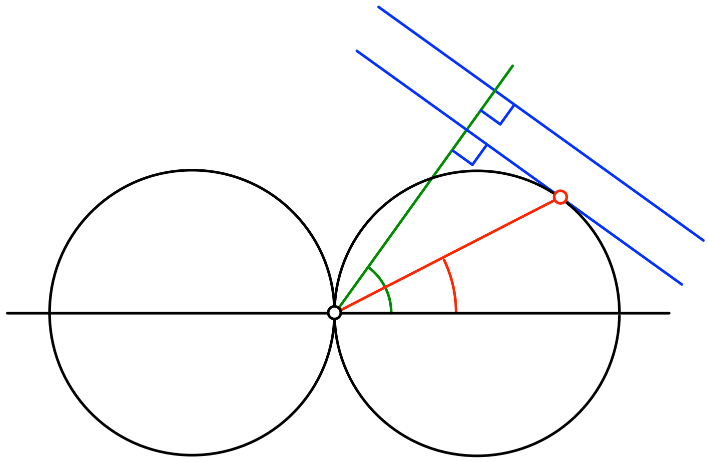

Abb. 10: Halber Winkel

Für den Beweis tragen wir, wie in der Sekundarschule gelernt, den Berührungsradius ein (Abb. 11).

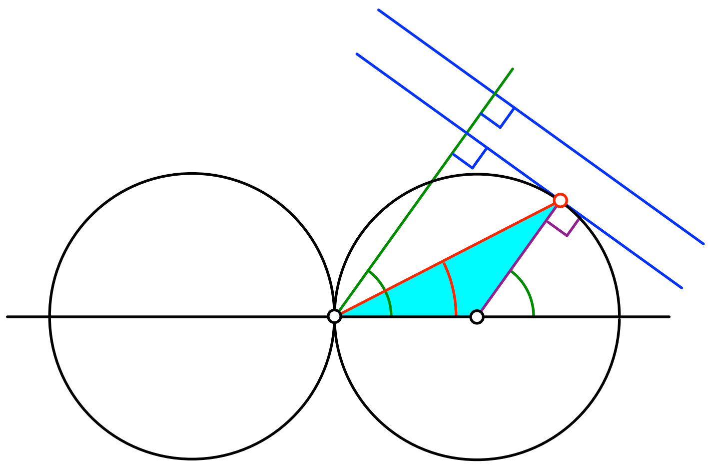

Abb. 11: Berührungsradius

Es entsteht ein gleichschenkliges Dreieck. Der Außenwinkel an der Spitze ist gleich dem Startwinkel. Die Basiswinkel sind halb so groß.

Damit am Schluss eine Frage offen bleibt: welche „liegende Acht“ führt zu einer Winkel-Viertelung?

Websites

Hans Walser: Winkelhalbierung
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkelhalbierung/Winkelhalbierung.htm

Hans Walser: Winkeldrittelung
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittelung4/Winkeldrittelung4.htm

Hans Walser: Winkeldrittelung
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittelung3/Winkeldrittelung3.htm

Hans Walser: Winkeldrittelung
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittelung2/Winkeldrittelung2.htm

Hans Walser: Winkeldrittelung
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittelung/Winkeldrittelung.htm