

Hans Walser, [20190925]

Winkeldrittung nach Archimedes und nach Bolyai

Idee und Anregung: Jörg Meyer, Hameln, sowie Hartmut Müller-Sommer, Vechta

1 Worum geht es?

Die Verfahren zur Winkeldrittung von Archimedes und von János Bolyai haben einen gemeinsamen Beweishintergrund.

2 Die Winkeldrittung nach Archimedes

2.1 Das Verfahren

Wir verlängern einen Schenkel des zu drittenden Winkels rückwärts über den Scheitel hinaus (Abb. 1).

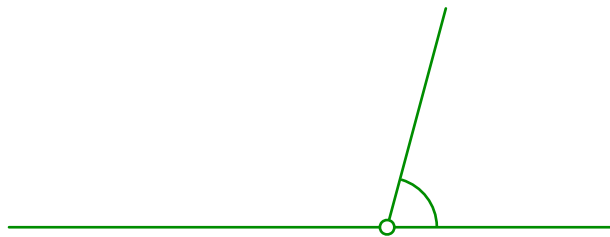


Abb. 1: Der zu drittende Winkel

Dann zeichnen wir einen Kreis mit dem Zentrum im Scheitel (Abb. 2). Der Radius ist beliebig, spielt aber im Folgenden eine wichtige Rolle.

Wir schneiden den zweiten Schenkel mit dem Kreis.

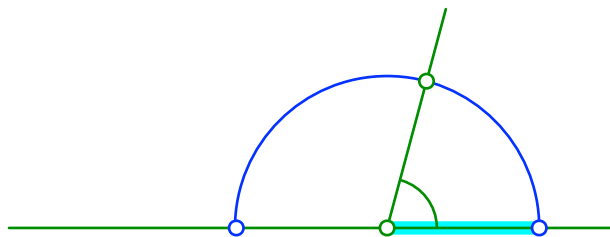


Abb. 2: Kreis

Nun bauen wir ein Lineal, auf dem wir zwei Marken im Abstand des Kreisradius anbringen (Abb. 3).



Abb. 3: Lineal mit zwei Marken

Dieses Lineal schieben wir so ein, dass die Startmarke auf dem nach rückwärts verlängerten Winkelschenkel liegt, die zweite Marke auf dem Kreis liegt und das Lineal durch den Schnittpunkt des Kreises mit dem anderen Schenkel verläuft (Abb. 4). Wir müssen also unser Augenmerk auf drei Orte richten. Das kommt bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal nicht vor.

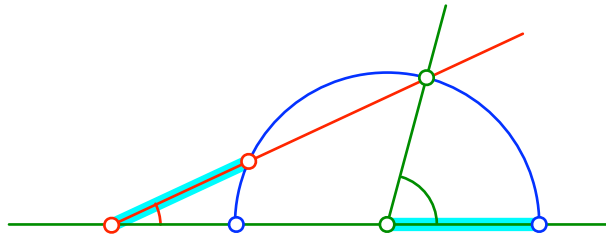


Abb. 4: Einschieben des Lineals

Der Winkel zwischen dem nach rückwärts verlängerten Schenkel und dem Lineal ist nun ein Drittel des Startwinkels.

Das Verfahren funktioniert für Startwinkel bis 135° .

2.2 Einsicht

Wir ergänzen die Figur gemäß Abbildung 5. Dabei kommt mehrere Male der Kreisradius vor. Es entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke.

Allgemein ist bei einem gleichschenkligen Dreieck der Außenwinkel an der Spitze doppelt so groß wie ein Basiswinkel. Dies führt zu der Winkelkonfiguration der Abbildung 5, aus der die Winkeldrittellung unmittelbar hervorgeht.

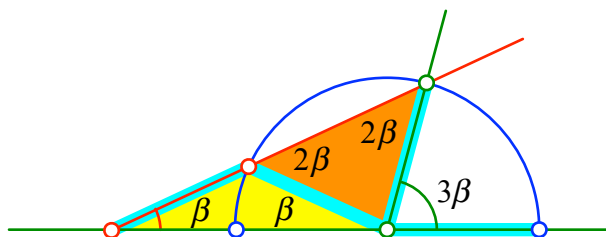


Abb. 5: Beweisfigur

2.3 Ein mechanisches Gerät

Die Idee der Winkeldrittellung nach Archimedes liegt dem mechanischen Gerät der Abbildung 6 zugrunde.

Das Gerät hat ein Gelenk an der Spitze links. Dort kann der Drittelwinkel abgelesen werden. Weiter hat das Gerät drei gleich lange schwarze Stangen, welche den drei zickzackförmig angeordneten Kreisradien der Abbildung 5 entsprechen. Das eine Ende der ersten Stange ist im Gelenk links. Das andere Ende liegt auf dem oberen Geräteteil, welcher dem Lineal mit den zwei Marken entspricht. Dort ist auch das eine Ende der zweiten Stange gelenkig befestigt. Das andere Ende ist auf einem Gleitgelenk auf dem

unteren Geräteteil, wo auch das eine Ende der dritten Stange festgemacht ist. Das andere Ende der dritten Stange schließlich ist auf einem Gleitgelenk des oberen Geräteteils. Der zu dritteln Winkel muss zwischen dem unteren Geräteteil und der dritten Stange eingepasst werden.



Abb. 6: Mechanisches Gerät

3 Die Winkeldrittung nach Bolyai

Das Verfahren von János Bolyai arbeitet mit einer gleichseitigen Hyperbel (Abb. 7). Die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel sind orthogonal (dies definiert eine gleichseitige Hyperbel).

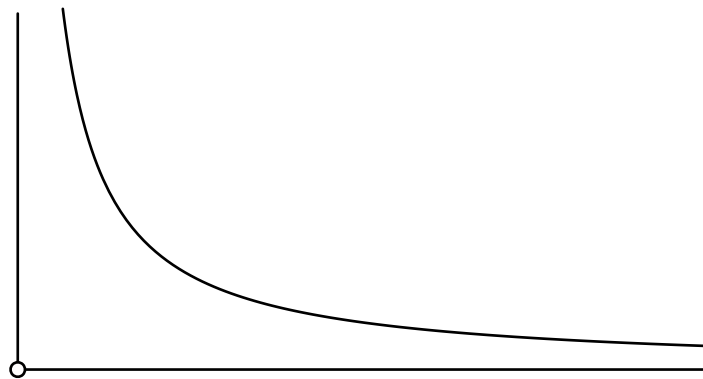


Abb. 7: Gleichseitige Hyperbel

3.1 Das Verfahren

Wir passen den zu dritteln Winkel so ein, dass der Scheitel im Asymptotenschnittpunkt liegt und ein Schenkel auf einer Asymptoten (Abb. 8). Den anderen Schenkel scheiden wir mit der Hyperbel.

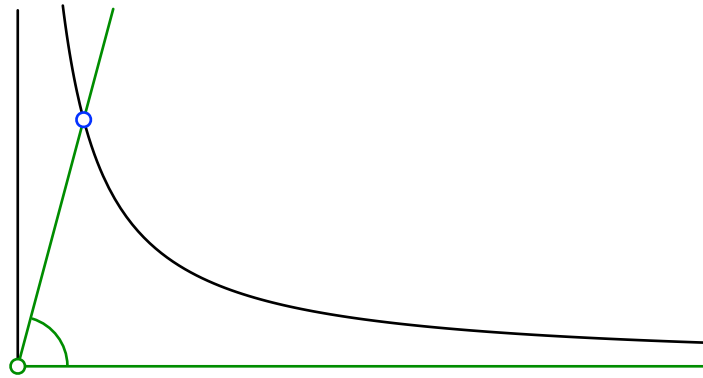


Abb. 8: Einpassen des Winkels

Nun zeichnen wir einen Kreis um den Schnittpunkt des zweiten Schenkels mit der Hyperbel mit einem Radius, der doppelt so groß ist wie der Abstand des Schnittpunktes vom Scheitel (Abb. 9). Diesen Kreis schneiden wir ebenfalls mit der Hyperbel, und zwar „rechts“ (bezogen auf die Abbildung 9).

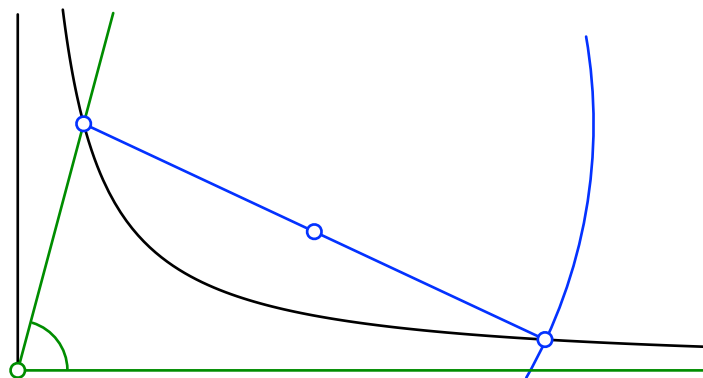


Abb. 9: Doppelt so großer Kreis

Nun haben wir zwei Punkte auf der Hyperbel. Diese ergänzen wir zu einem asymptotenparallelen Rechteck (Abb. 10).

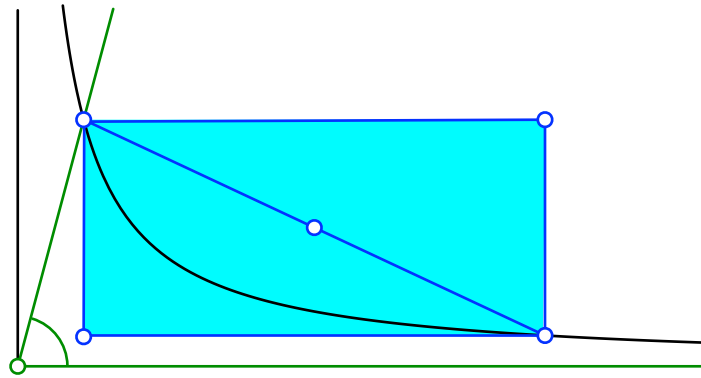


Abb. 10: Ergänzung zum Rechteck

Und nun kommt der Gag (Abb. 11).

Erstens: die zweite Diagonale dieses Rechtecks verläuft durch den Asymptotenschnittpunkt. Beweis folgt.

Zweitens: die Zweite Diagonale schließt mit dem ersten Schenkel des Startwinkels den gesuchten Drittelwinkel ein. Beweis folgt.

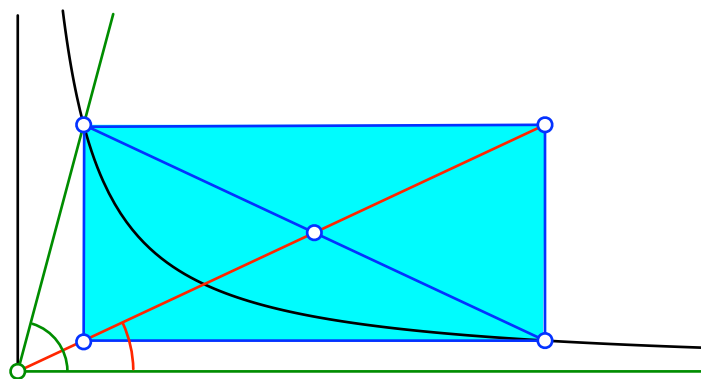


Abb. 11: Die zweite Diagonale

3.2 Vereinfachung

Die Konstruktion lässt sich vereinfachen. Wir brauchen das Rechteck gar nicht zu zeichnen. Nach dem Eintragen des doppelt so großen Kreises müssen wir nur die Sehne zwischen den beiden Hyperbelpunkten halbieren und den Mittelpunkt mit dem ursprünglichen Winkelscheitel verbinden (Abb. 12).

Der ursprüngliche Winkel und sein Drittel haben den Scheitelpunkt und einen Schenkel gemeinsam.

Das Verfahren funktioniert für Winkel $< 90^\circ$.

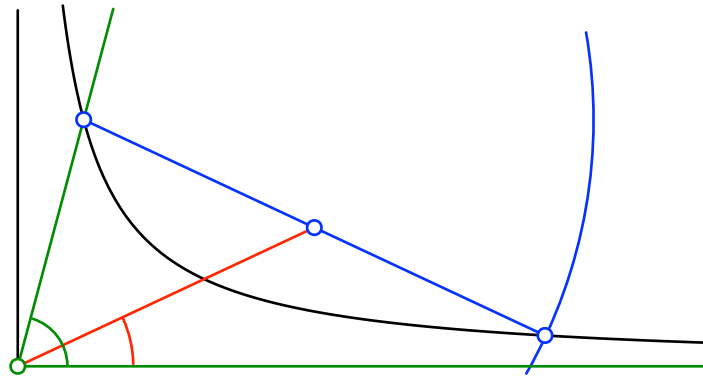


Abb. 12: Vereinfachung

3.3 Beweise

Zu „erstens“: Für eine beliebige Hyperbel gilt: Wenn wir auf einer Hyperbel zwei Punkte wählen und zu einem asymptotenparallelen Parallelogramm ergänzen, verläuft die Gerade durch die beiden anderen Punkte durch den Asymptotenschnittpunkt (Abb. 13).

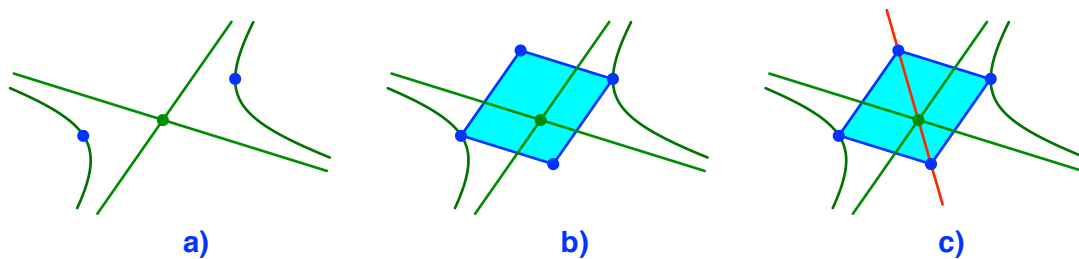


Abb. 13: Diagonale trifft Asymptotenschnittpunkt

Für den Beweis siehe Website Hans Walser, [Kollineare Punkte](#). In unserm Fall haben wir es mit einem Sonderfall dieses allgemeinen Sachverhaltes zu tun.

Zu „zweitens“: Die Abbildung 14 zeigt die Beweisfigur.

Die Beweisfigur entspricht der Beweisfigur der Abbildung 5 für das Verfahren von Archimedes.

Für die Beweisfigur der Abbildung 14 ist das Rechteck erforderlich.

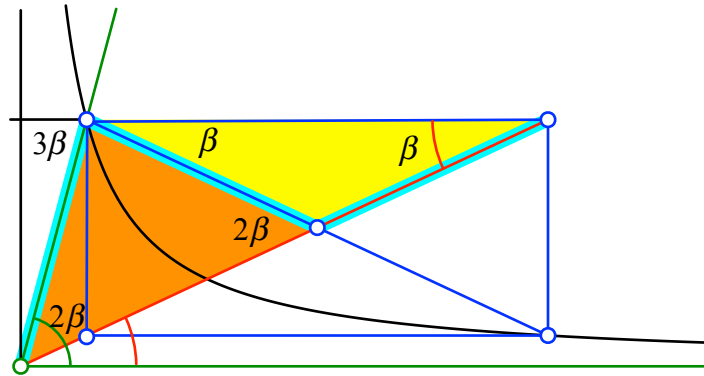


Abb. 14: Beweisfigur

Websites

Hans Walser: Kollineare Punkte

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kollineare_Punkte3/Kollineare_Punkte3.htm

Hans Walser: Winkeldrittung mit Zykloiden

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung8/Winkeldrittung8.htm

Hans Walser: Winkeldrittung mit Hyperbel

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung7/Winkeldrittung7.htm

Hans Walser: Winkeldrittung mit Lemniskate

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung5/Winkeldrittung5.htm

Hans Walser: Winkeldrittung

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung4/Winkeldrittung4.htm

Hans Walser: Winkeldrittung

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung3/Winkeldrittung3.htm

Hans Walser: Winkeldrittung

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung2/Winkeldrittung2.htm

Hans Walser: Winkeldrittung

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung/Winkeldrittung.htm

Hans Walser: Winkeldrittung

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung9/Winkeldrittung9.htm