Hans Walser, [20141105]

Winkelhalbierende Kreise

Anregung und Idee: U. H.-J., W.

1 Worum geht es?

Im Dreieck werden die Zentren des Inkreises und der Ankreise traditionellerweise mit winkelhalbierenden Geraden konstruiert. Es geht aber auch mit „winkelhalbierenden“ Kreisen (rot und blau in Abb. 1).

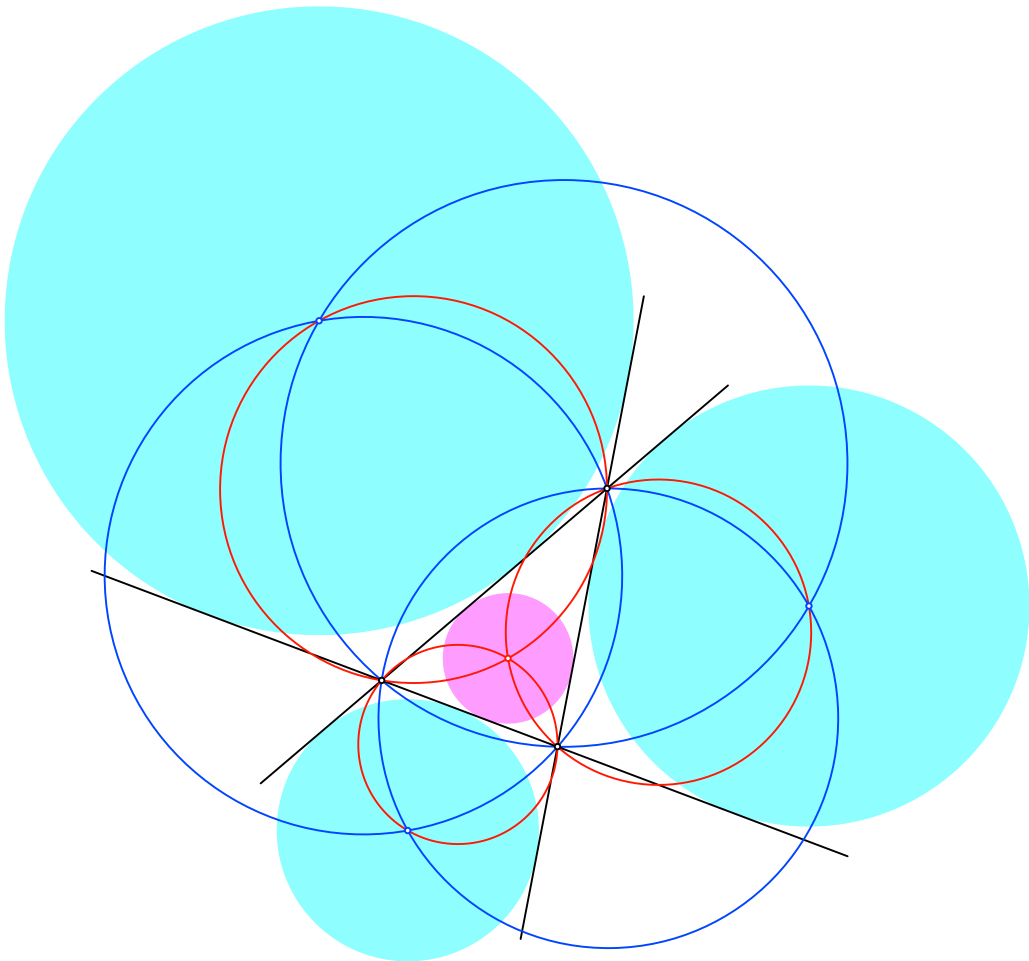

Abb. 1: Inkreis und Ankreise

Die Frage ist natürlich, warum das „winkelhalbierende“ Kreise sind, das heißt, welchen Winkel sie halbieren, und wie sie konstruiert werden können.

2 Winkelhalbierende Kreise

Zu einem Dreieck ABC mit der üblichen Notation zeichnen wir den Umkreis mit dem Mittelpunkt D sowie die Bogenmitten C_1 und C_2. Diese Bogenmitten liegen auf der Mittelsenkrechten m_c (Abb. 2). Nun zeichnen wir den blauen Kreis mit dem Zentrum C_1 durch A. Aus Symmetriegründen verläuft er auch durch B.

Ferner zeichnen wir in A das Lot auf die Seite c. Dann sind die in der Abbildung 2 eingezeichneten zyanfarbenen und magentafarbenen Winkel alle gleich groß, nämlich $\frac{\gamma}{2}$.

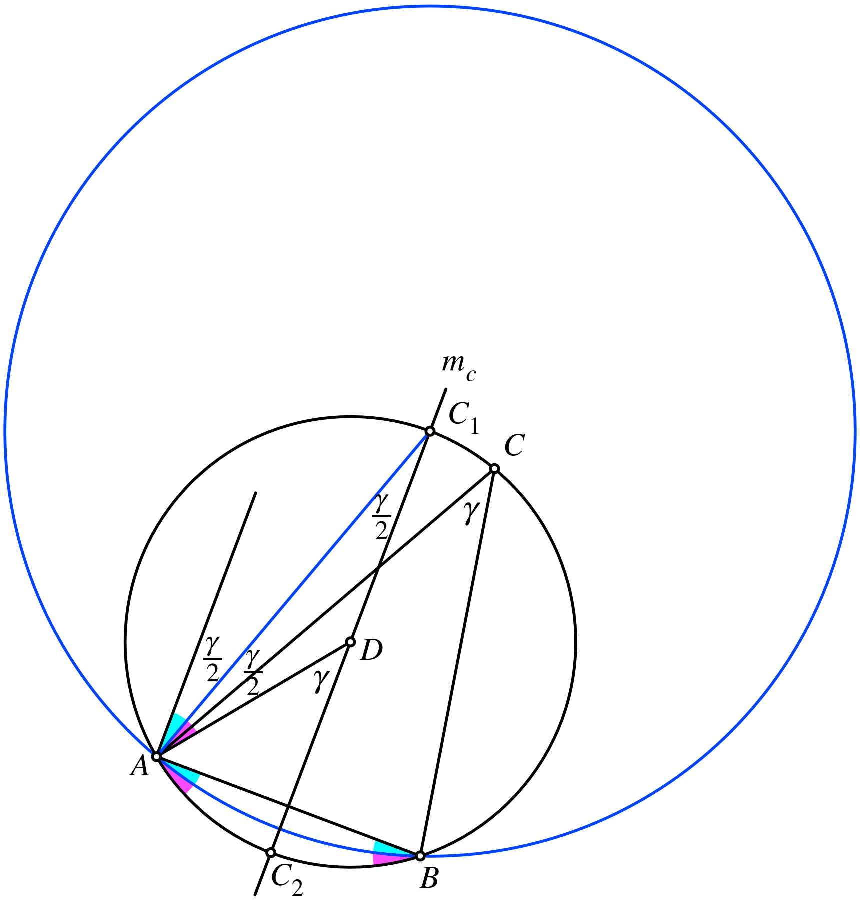

Abb. 2: Winkelhalbierender Kreis

Der blaue Kreis halbiert also den Winkel zwischen der Seite c und dem durch C_2 verlaufenden Bogen $\overset{\frown}{AB}$ des Umkreises. Der kurze Bogen $\overset{\frown}{AB}$ des blauen Kreises ist Ortsbogen über c für den Winkel $\pi - \frac{\gamma}{2}$. Der lange Bogen $\overset{\frown}{BA}$ des blauen Kreises ist Ortsbogen über c für den Ergänzungswinkel $\frac{\gamma}{2}$. Daher liegen (Winkelüberlegungen mit üblichen Winkelhalbierenden) auch die Mittelpunkte der Ankreise an a und an b auf dem langen Bogen $\overset{\frown}{BA}$ des blauen Kreises.

Weiter zeichnen wir den roten Kreis mit dem Zentrum C_2 durch A (Abb. 3). Für diesen roten Kreis können wir analog zum blauen Kreis überlegen, wobei der Dreieckswinkel γ durch den Außenwinkel $\overline{\gamma} = \pi - \gamma$ zu ersetzen ist.

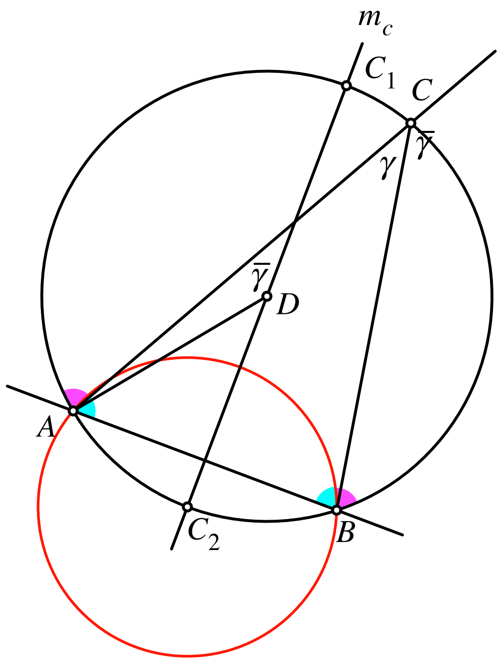

Abb. 3: Zweiter winkelhalbierender Kreis

Der kurze Bogen $\overset{\frown}{BA}$ des roten Kreises ist Ortsbogen über c für den Winkel $\pi - \frac{\overline{\gamma}}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Daher liegt (Winkelüberlegungen mit üblichen Winkelhalbierenden) der Inkreismittelpunkt auf diesem kurzen Bogen $\overset{\frown}{BA}$. Der lange Bogen $\overset{\frown}{AB}$ des roten Kreises ist Ortsbogen über c für den Winkel $\frac{\overline{\gamma}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Daher liegt der Mittelpunkt des Ankreises an c auf diesem Bogen.

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir daher:

Die drei roten Kreise schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Inkreises.

Je zwei blaue und ein roter Kreis schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt eines Ankreises.

Die Abbildung 4 zeigt nochmals die Abbildung 1, nun aber mit Konstruktionsinformationen.

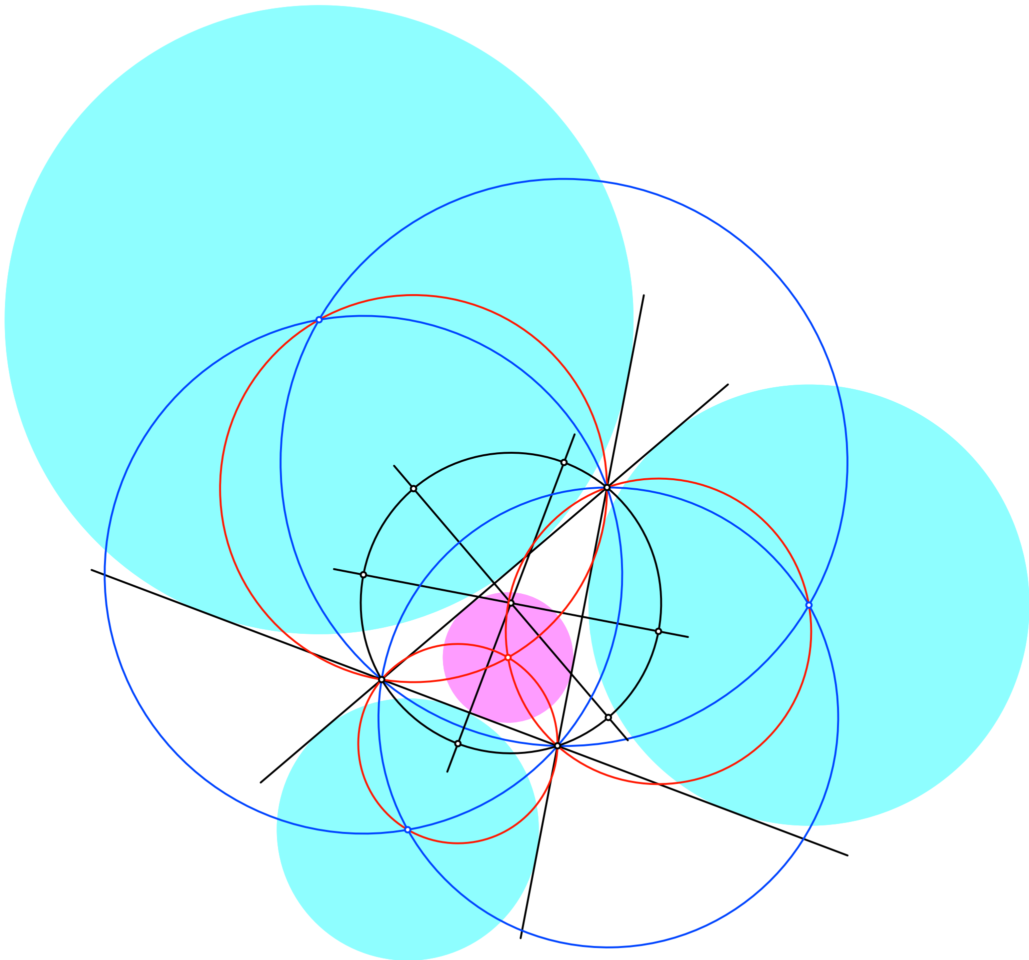

Abb. 4: Konstruktion