

Winkelhalbierung

1 Worum geht es?

Flächenzerlegungen bei der Winkelhalbierenden eines Dreiecks.

2 Winkelhalbierende

Die Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Beispiel: Die Winkelhalbierende des Winkels γ teilt die Seite c im Verhältnis $a:b$ (Abb. 1). Damit teilt die Winkelhalbierende des Winkels γ aber auch die Dreiecksfläche im Verhältnis $a:b$.

In der Abbildung 1 sind $u = a + b + c$ der Umfang und r der Inkreisradius des Dreiecks.

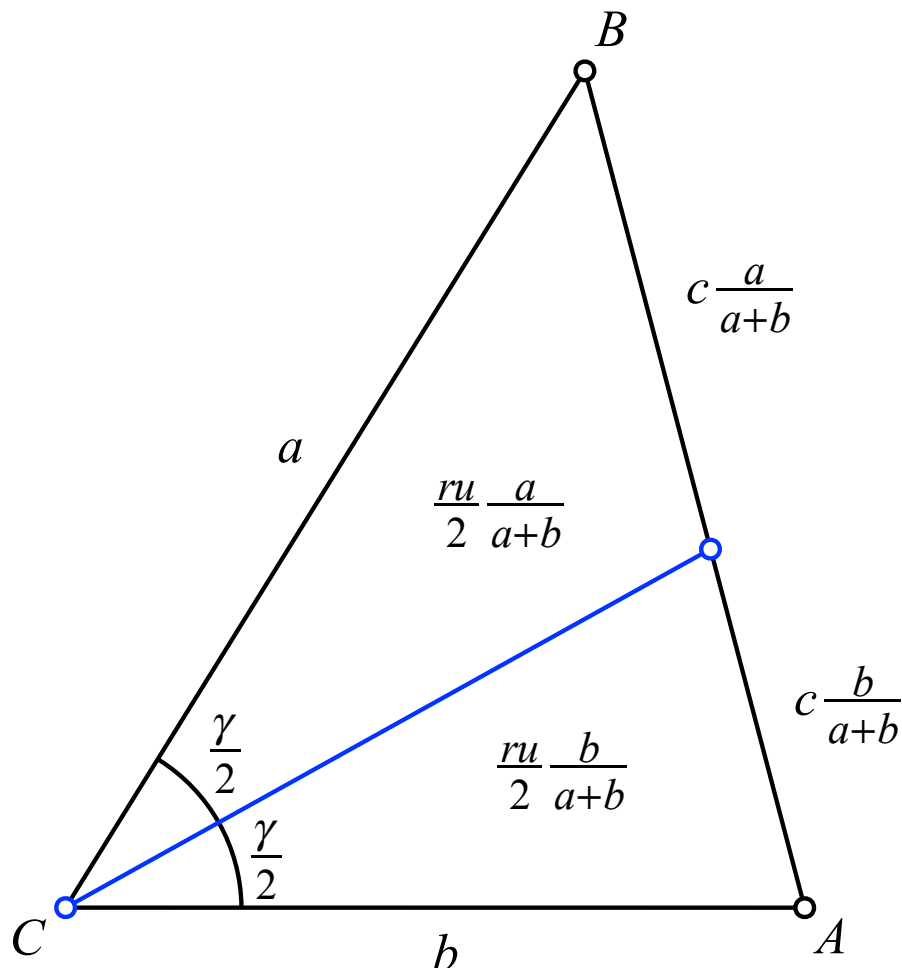


Abb. 1: Winkelhalbierende

3 Rationale Flächenverhältnisse

Wenn nun das Verhältnis $a:b$ rational ist, kann das Flächenverhältnis durch eine Zerlegung illustriert werden.

4 Beispiele

Im folgenden Beispiele mit rationalen Seitenverhältnissen.

4.1 Gleichschenkliges Dreieck

Im gleichschenkligen Dreieck mit $a:b = 1:1$ ist der Sachverhalt trivial (Abb. 2).

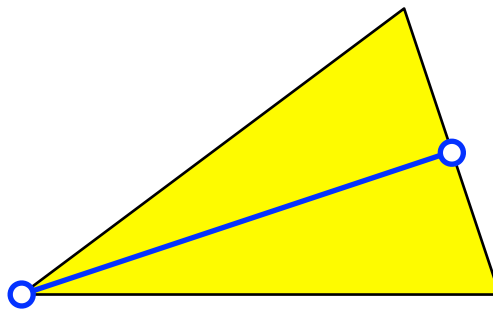


Abb. 2: Gleichschenkliges Dreieck

4.2 Halbes gleichseitiges Dreieck

Im halben gleichseitigen Dreieck mit den Winkeln 90° , 30° , 60° haben wir ein Seitenverhältnis $a:b = 2:1$ (Abb. 3). Das entsprechende Flächenverhältnis ist unmittelbar einsehbar.

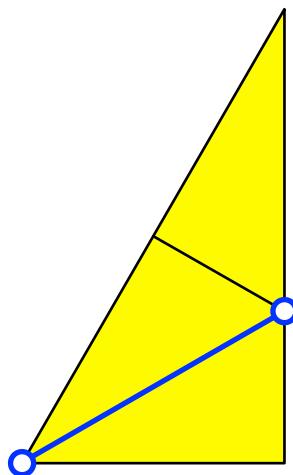


Abb. 3: Halbes gleichseitiges Dreieck

Die Abbildung 4 zeigt eine etwas aufwändigere Variante. Die Figur ist in ein Parallelogrammraster eingebettet.

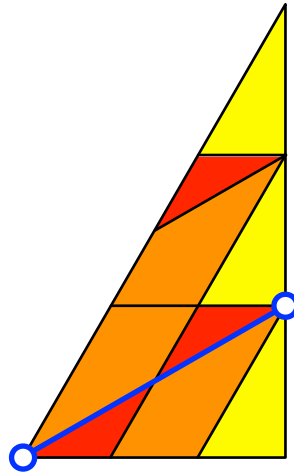


Abb. 4: Einbetten in Parallelogrammraster

4.3 Weitere Beispiele

Das Beispiel der Abbildung 5 hat ebenfalls das Seitenverhältnis 2:1. Die Figuren der Abbildungen 4 und 5 können aber nicht durch eine Scherung ineinander übergeführt werden, da die Winkelhalbierende nicht scherungsinvariant ist.

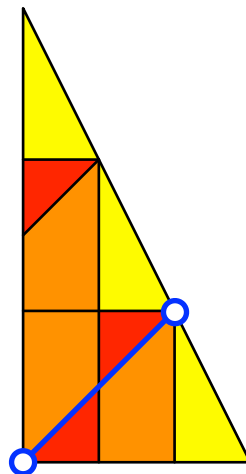


Abb. 5: Seitenverhältnis 2:1

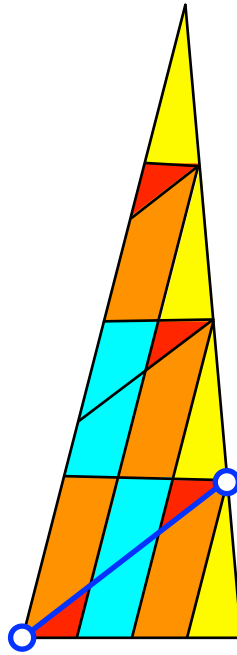


Abb. 6: Seitenverhältnis 3:1

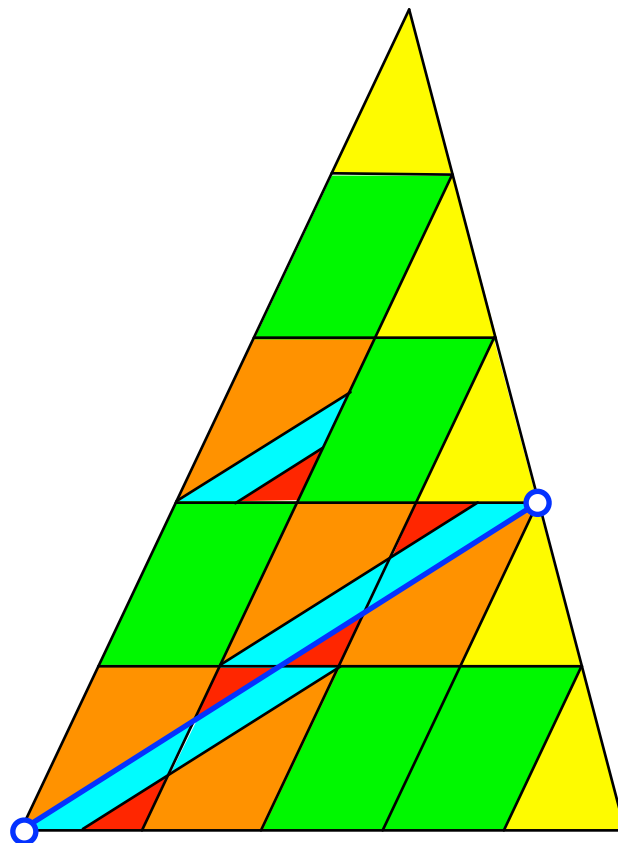


Abb. 7: Seitenverhältnis 3:2

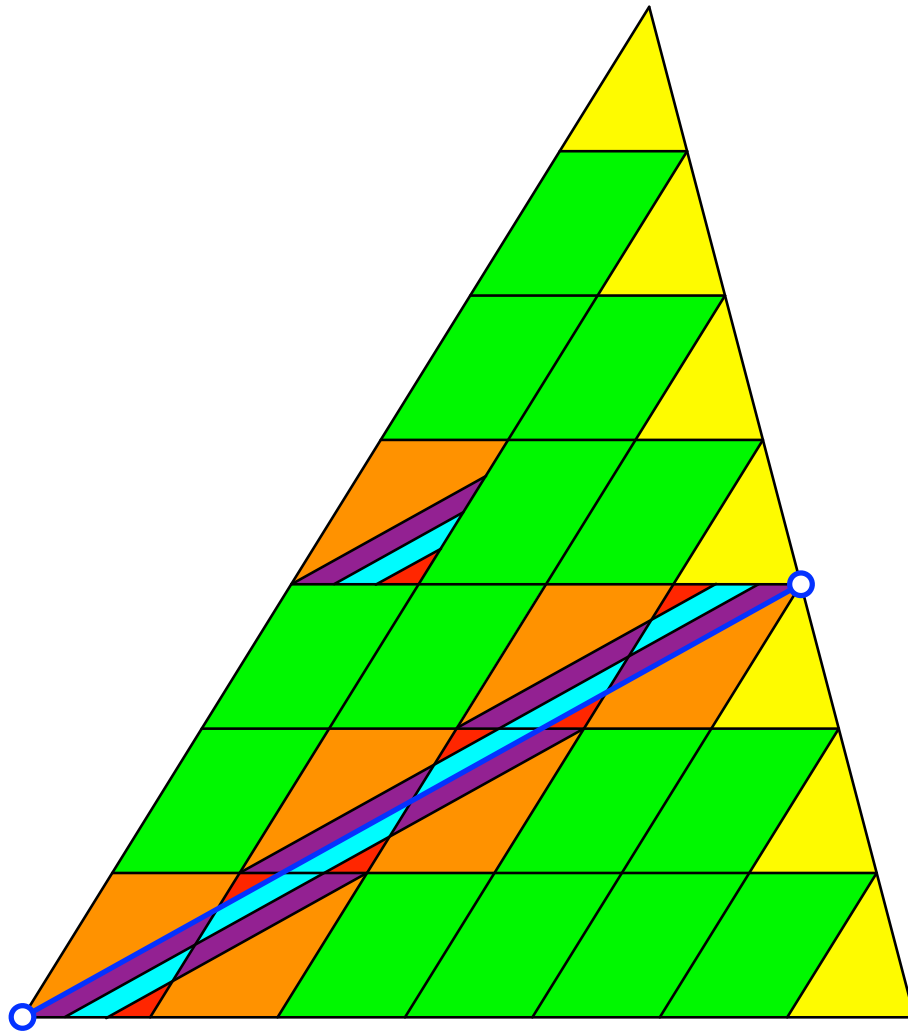


Abb. 8: Seitenverhältnis 4:3

5 Vorgehen

Der Trick geht offenbar so: Beim Seitenverhältnis $a:b$ werden die beiden den zu halbierenden Winkel γ umfassenden Seiten je in $a + b$ gleiche Teile unterteilt. Mit diesen Teilen bauen wir einen Parallelogrammraster, der beim Winkel γ aneckt. Bei der Seite c ergeben sich dann oben a und unten b halbe Parallelogramme (in den Abbildungen 4 bis 8 jeweils gelb gezeichnet). Die halben Parallelogramme sind ähnlich zum Gesamtdreieck.

Dann wird im vorgegebenen Anzahl-Verhältnis mit Parallelogrammen gekachelt, solange es geht. Anschließend müssen die Parallelogramme passend zugeschnitten werden. Dabei muss immer auf das vorgegebene Anzahl-Verhältnis geachtet werden. Es kommt fast automatisch richtig.

6 Alle drei Winkelhalbierende

Werden alle drei Winkelhalbierende gezeichnet, ergeben sich sechs Teilflächen. Die Abbildung 9 gibt die Flächenanteile formelmäßig.

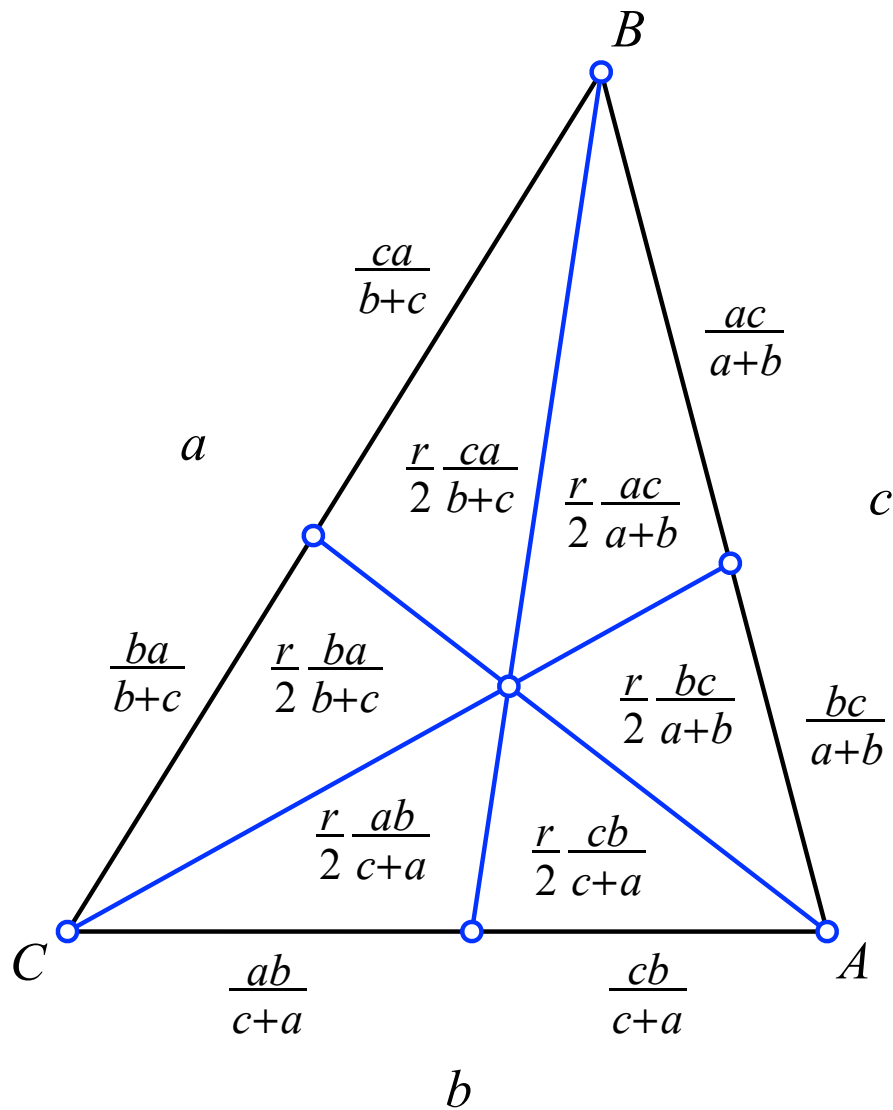


Abb. 9: Drei Winkelhalbierende

Wegen dem Satz von Bolyai-Gerwien ist bei rationalen Seitenverhältnissen auch hier eine Visualisierung möglich. Ich hab's nicht ausprobiert.