Hans Walser, [20160518]

Winkelprobleme

1 Worum geht es?

Es wird eine Serie von Winkelproblemen mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad vorgestellt.

2 Die Probleme

Die Abbildungen 1a bis 1h zeigen die Probleme. Wie groß ist jeweils der rot markierte Winkel?

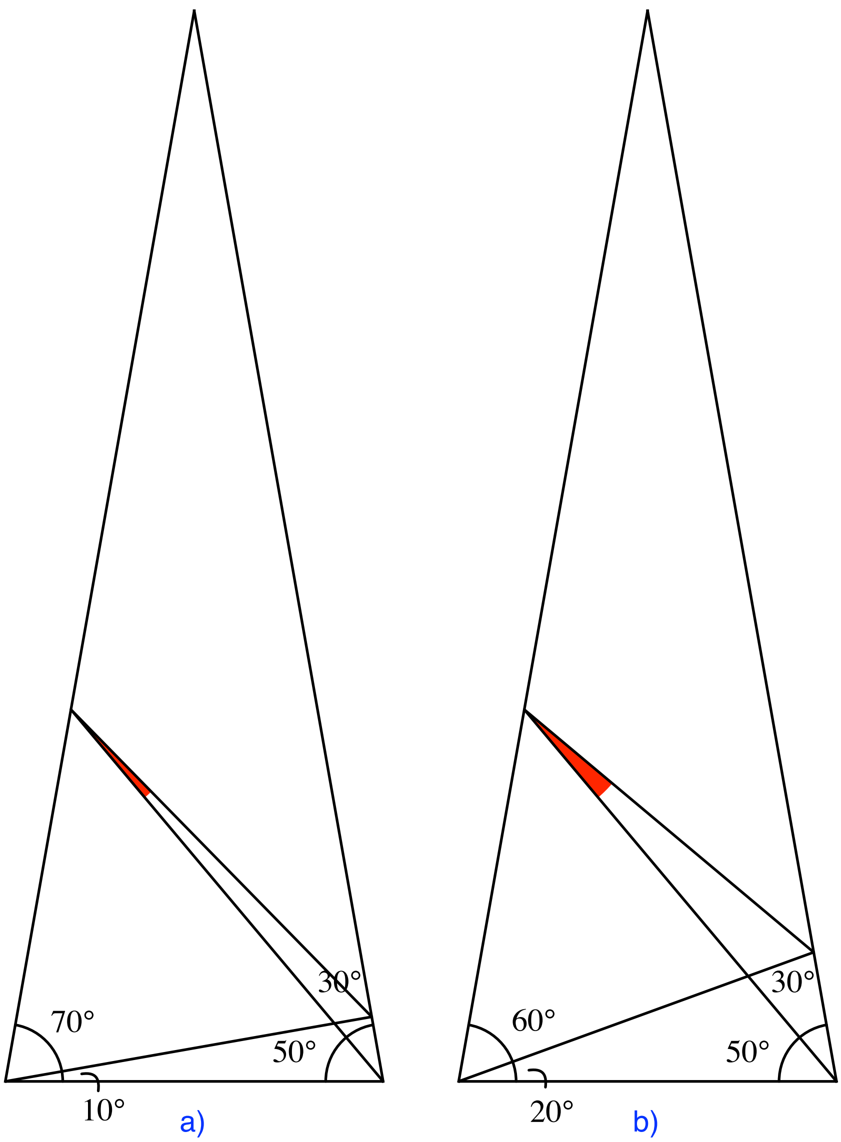

Abb. 1: Wie groß ist der rote Winkel?

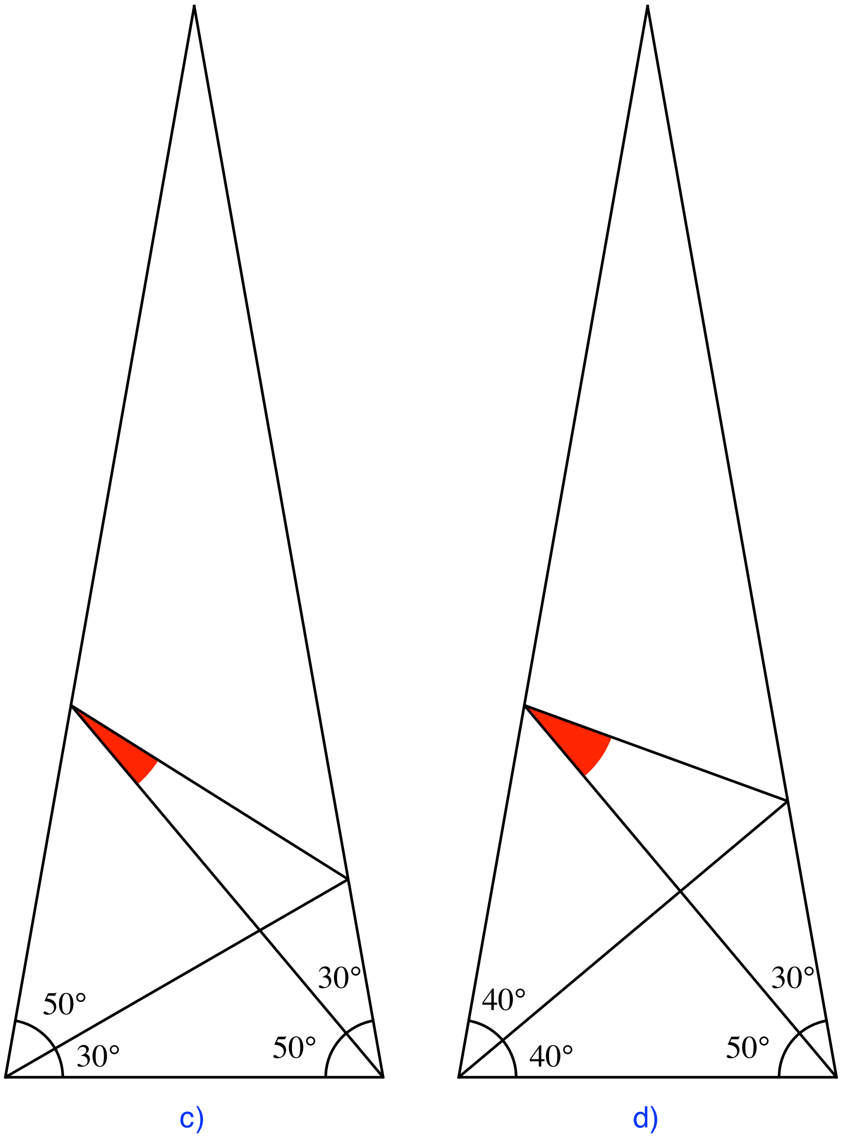

Abb. 1: Wie groß ist der rote Winkel?

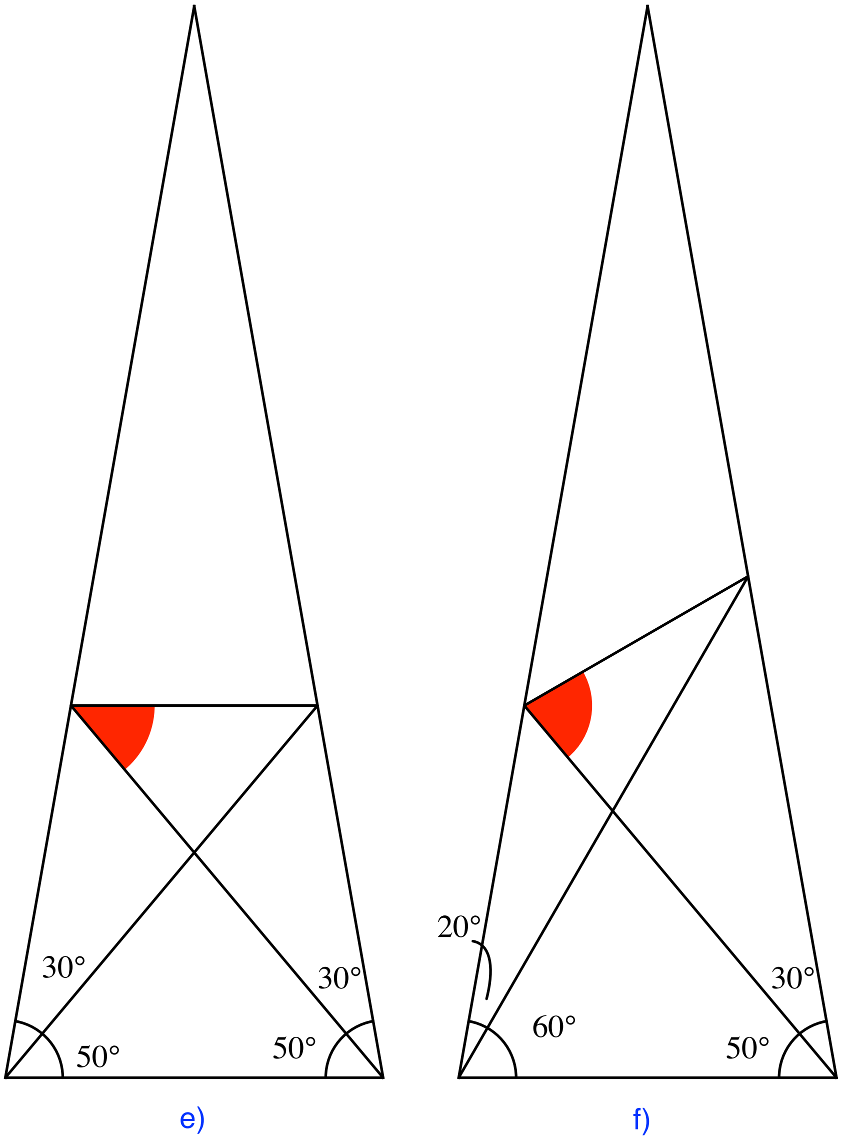

Abb. 1: Wie groß ist der rote Winkel?

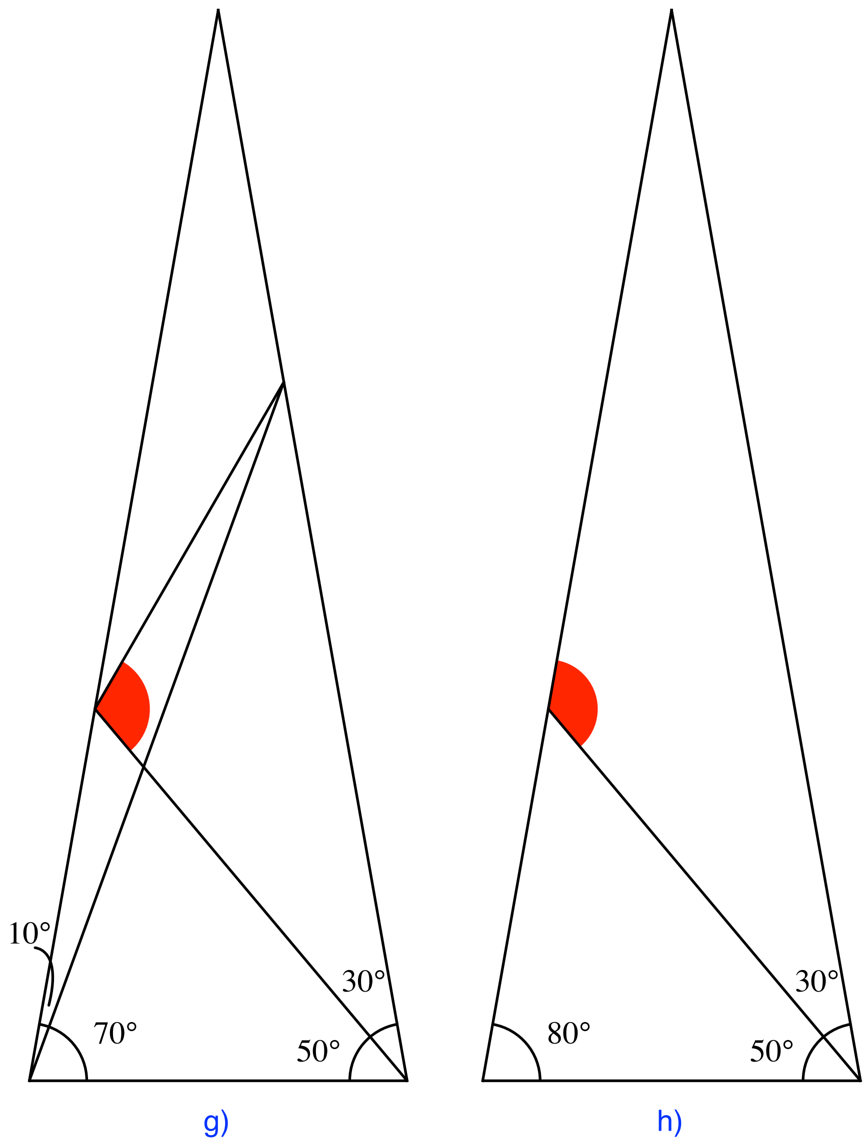

Abb. 1: Wie groß ist der rote Winkel?

3 Resultate

Experiment mit DGS ergibt (Tab. 1):

Aufgabe	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h
Winkel	4.37370°	10°	17.87799°	30°	50°	80°	110°	130°

Tab. 1: Ergebnisse

Auffallend sind die vielen „schönen“ Ergebnisse. Wie lassen sich diese beweisen?

4 Bearbeitungen

Die „hässlichen“ Beispiele a und c lassen wir weg.

Die Beispiele 1d (Drachenviereck), 1e (Gleichschenkliges Trapez) und 1h (Außenwinkel im Dreieck) sind trivial.

Bleiben die spannenden Beispiele 1b, 1f und 1g.

4.1 Der Fall 1b

Aus Platzspar-Gründen ist in der Abbildung 2 nur der relevante Teil der Abbildung 1b gezeichnet.

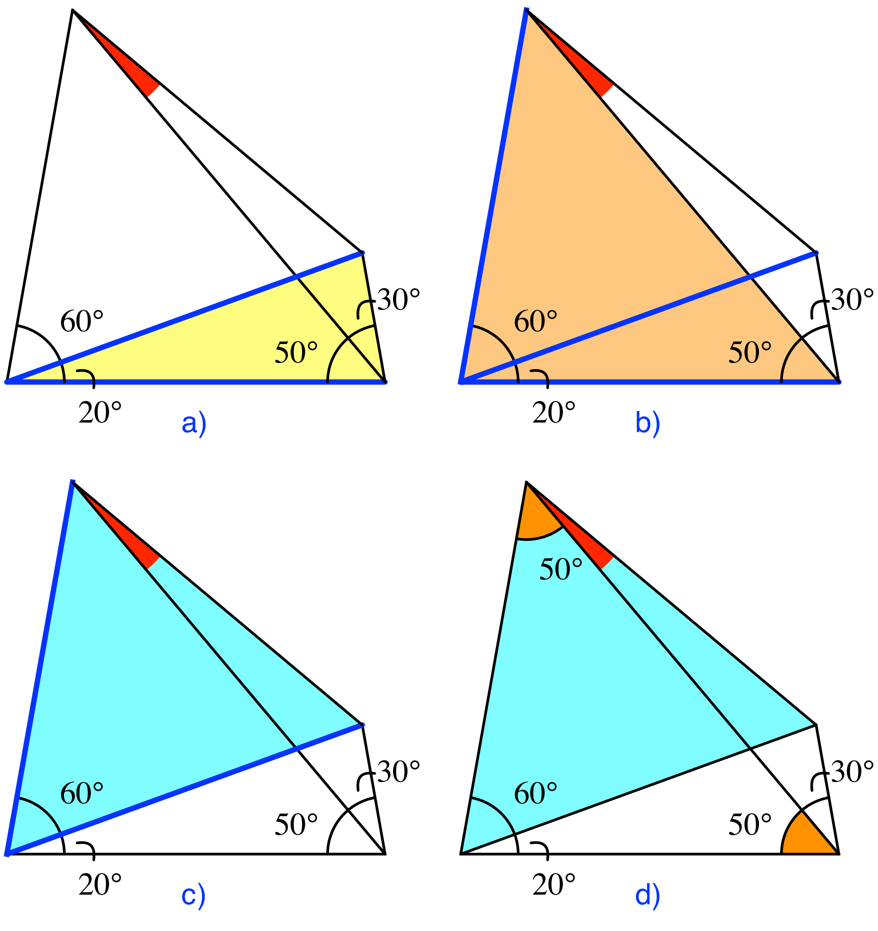

Abb. 2: Beweiskette für den Fall 1b

Das in der Abbildung 2a markiert gelbe Dreieck hat die Winkel 20° und 80°. Der dritte Winkel misst daher auch 80°. Das gelbe Dreieck ist gleichschenklig, die blauen Strecken sind gleich lang.

Das in der Abbildung 2b markierte orange Dreieck hat die Winkel 80° und 50°. Der dritte Winkel misst daher auch 50°. Das orange Dreieck ist gleichschenklig, und wir haben eine dritte blaue Strecke gleicher Länge.

Das in der Abbildung 2c markierte hellblaue Dreieck hat zwei gleich lange Seiten und den eingeschlossenen Winkel 60°. Es ist also gleichseitig, auch die beiden anderen Winkel messen 60°.

Der gesuchte rote Winkel ist nun die Differenz eines 60°-Winkels des hellblauen gleichseitigen Dreiecks minus einem 50°-Winkel des orangen Dreiecks.

Der rote Winkel misst also 10°.

4.2 Der Fall 1f

Eine ausführliche Bearbeitung des Falles 1f hier.

Die Figur der Abbildung 1f lässt sich in einen regelmäßigen Stern mit neun Spitzen einpassen (Abb. 3).

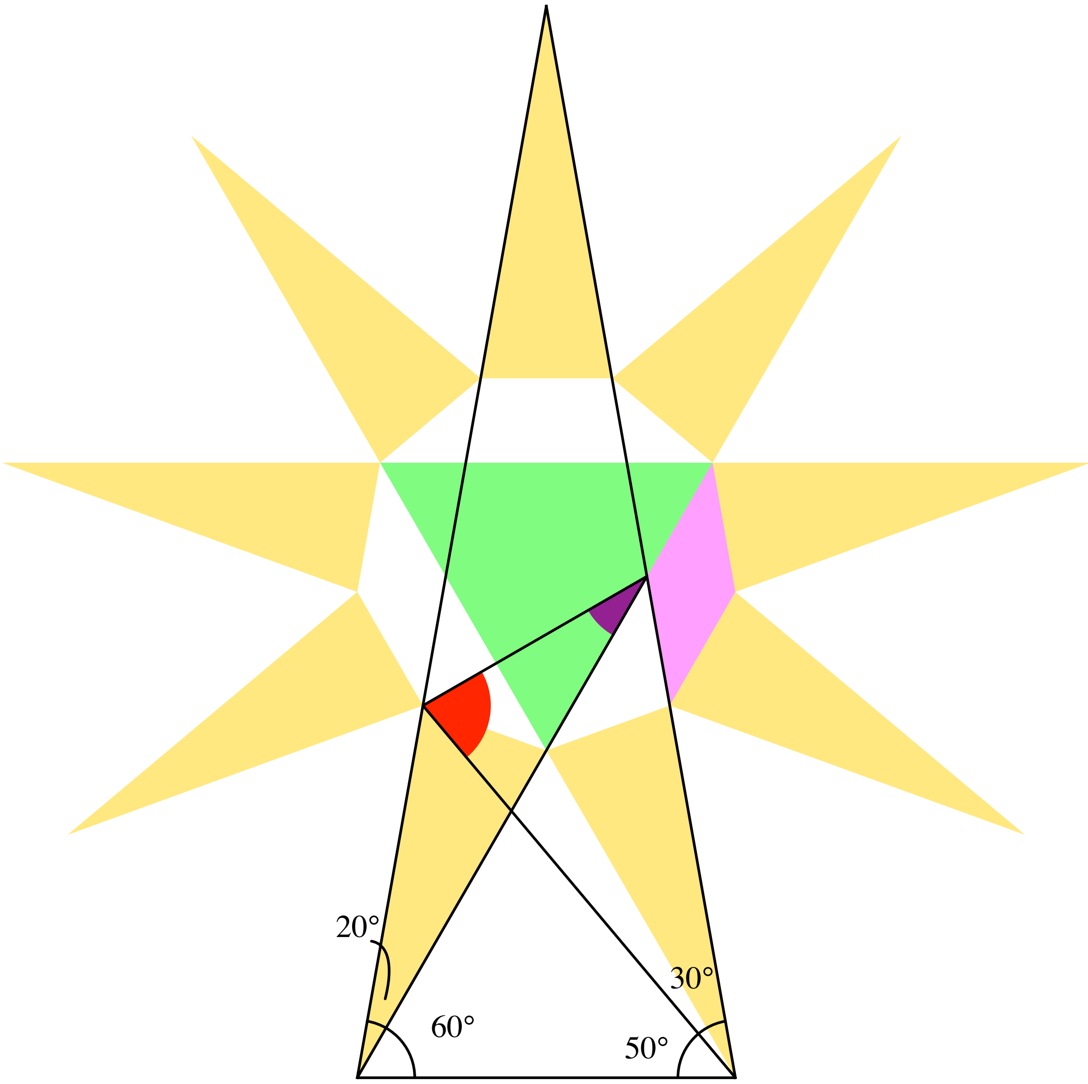

Abb. 3: Stern mit neun Spitzen

Damit lässt sich zunächst der lila markierte Winkel zu 30° berechnen und schließlich der rote Winkel zu 80°.

4.3 Der Fall 1g

Zur Vorbereitung machen wir eine kleine Faltübung (Abb. 4). Wir beginnen mit einem regelmäßigen Neuneck auf einem Papier, das vorne gelb und auf der Rückseite himmelblau ist. Auf der Vorderseite zeichnen wir zwei Diagonalen ein gemäß Abbildung 4a. Diese beiden Diagonalen schneiden sich unter 20° (halber Zentriwinkel des regelmäßigen Neunecks). Das durch die beiden Diagonalen gebildete gleichschenklige Dreieck entspricht dem Umrissdreieck der Figuren der Abbildung 1.

Nun falten wir den linken Teil des Papiers abwechslungsweise an den beiden Diagonalen. So entsteht zwischen den beiden Diagonalen eine gleichseitige Zickzacklinie. Die Seitenlänge ist gleich der Seitenlänge des Neunecks.

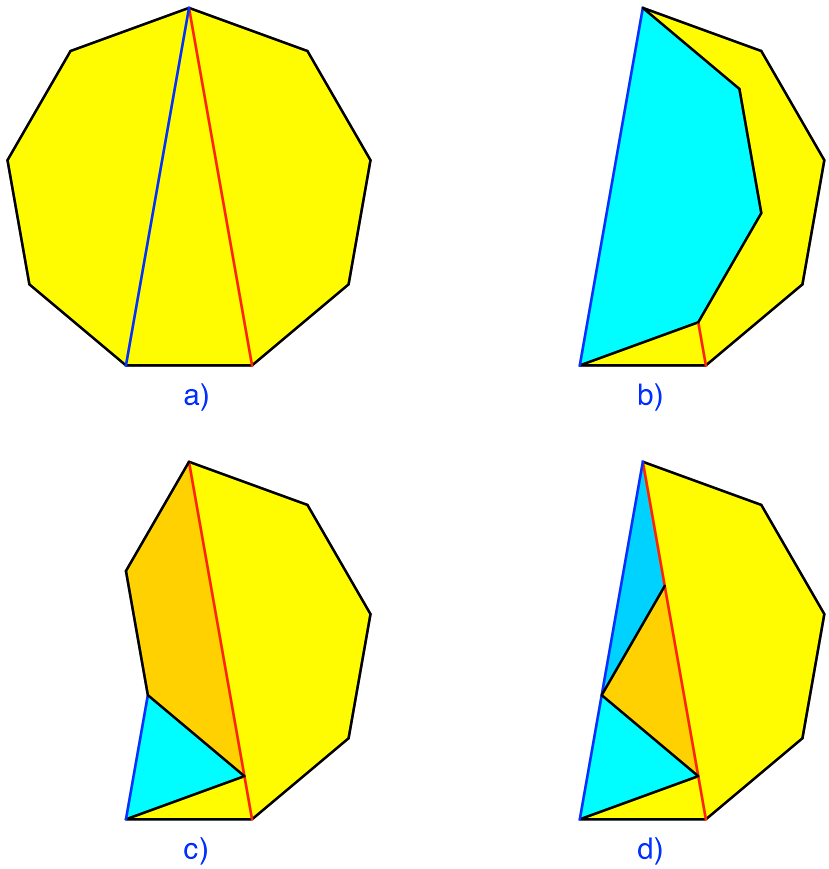

Abb. 4: Falten

Somit erhalten wir eine Folge von gleichschenkligen Dreiecken. Wir können deren Winkel von oben nach unten (oder von unten nach oben) berechnen. Das oberste gleichschenklige Dreieck (blau in Abb. 4d) hat die Winkel 140°, 20°, 20°. Das nächste (goldgelb) hat die Winkel 100°, 40°, 40°. Das nächste (himmelblau) hat die Winkel 60°, 60°, 60°; es ist also gleichseitig. Das unterste (gelb) schließlich hat die Winkel 20°, 80°, 80°.

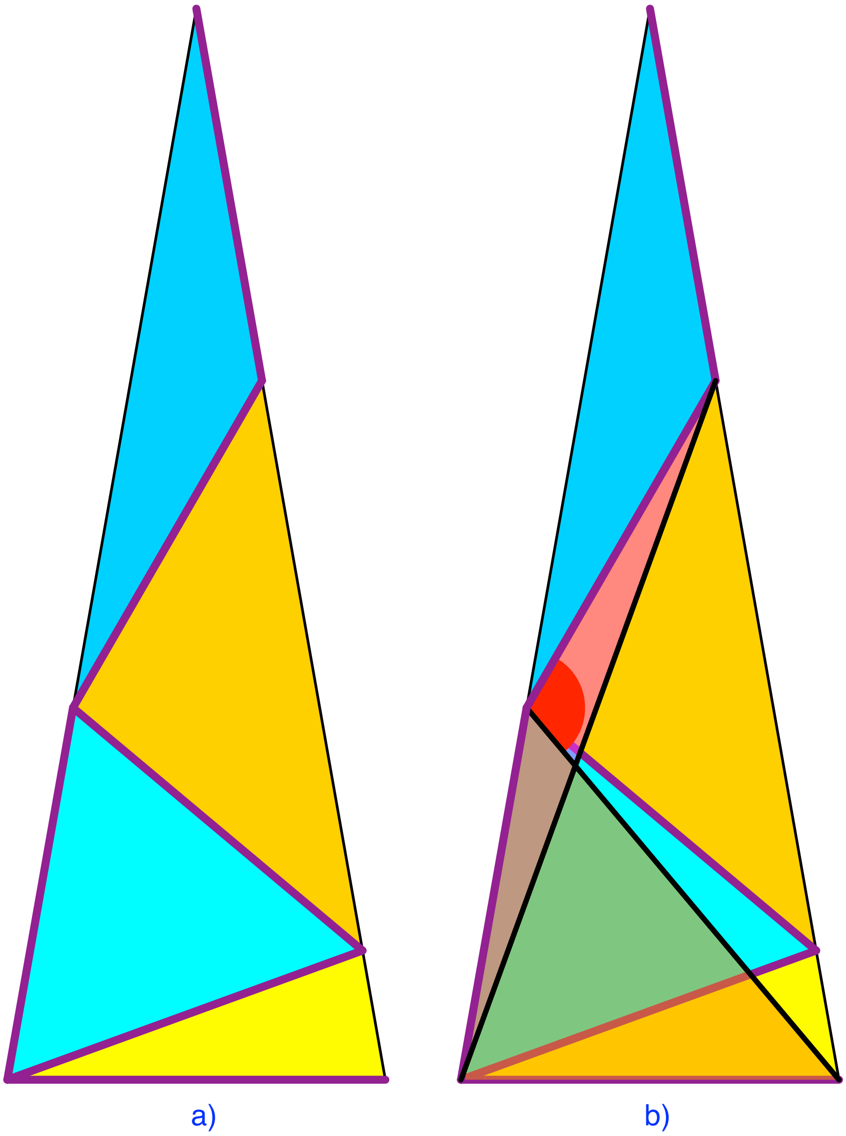

Abb. 5: Weitere gleichschenklige Dreiecke

Das himmelblaue gleichseitige Dreieck liefert uns noch eine weitere Strecke gleicher Länge (Abb. 5a). Somit ergeben sich noch zwei weitere gleichschenklige Dreiecke, die in der Abbildung 5b mit schwarzer Grundlinie eingezeichnet sind. Das eine hat die Winkel 80°, 50°, 50°. Seine Grundlinie hat zur Basis der Gesamtfigur einen Neigungswinkel 50°. Das zweite gleichschenklige Dreieck hat die Winkel 160°, 10°, 10°. Seine Grundlinie hat zur Basislinie der Gesamtfigur einen Neigungswinkel 70°.

Das ist nun aber genau die Disposition der Figur der Abbildung 1g. Der gesuchte rote Winkel ist die Differenz 160° – 50° = 110°.