Hans Walser, [20170827a]

Würfel auf Ecke

Anregung und Idee: B. K., Z.

1 Worum geht es?

Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Spielwürfel auf einer Ecke stehenbleibt (Abb. 1)?

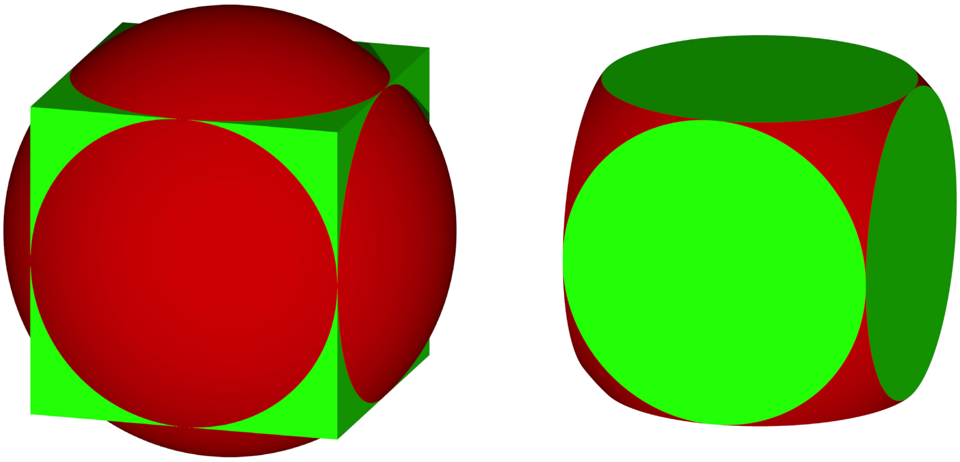
Abb. 1: Würfel auf Ecke

Der Autor gesteht, dass er den Würfel sehr sorgfältig so hingestellt hat.

2 Analyse des Spielwürfels

Ein Spielwürfel ist nicht einfach ein regelmäßiges Hexaeder (Kubus, Würfel im geometrischen Sinn) mit allenfalls leicht abgerundeten Ecken und Kanten. Das „Abrunden" der Ecken geschieht systematisch wie folgt.

Wir beginnen mit einem regelmäßigen Hexaeder zusammen mit seiner Kantenmittenkugel (Abb. 2a). Die Kantenmittenkugel berührt, wie der Name sagt, die Kantenmitten des Hexaeders. Sie liegt also *zwischen* der Inkugel und der Umkugel des Hexaeders.



a) b)

Abb. 2: Hexaeder mit Kantenmittenkugel

Der Spielwürfel ist nun geometrisch die Schnittfigur des Hexaeders mit seiner Kantenmittenkugel (Abb. 2b).

Wenn nun der Spielwürfel sorgfältig auf einen inneren roten Punkt der Oberfläche in der Abbildung 2b auf eine horizontale Ebene abgelegt wird, befindet sich sein Schwerpunkt senkrecht oberhalb des Auflagepunktes. Der Spielwürfel bleibt stehen.

3 Was geschieht beim Würfeln?

Die Wörter *Würfel* und *würfeln* kommen von *Wurf* oder *werfen*. Beim Würfeln erhält der Spielwürfel einen Impuls, der ihn, falls er auf einem roten Punkt auftrifft, weiterrollen lässt, bis er auf eine grüne Seitenfläche einschnappt.

4 Sprachliches

Eigentlich ist es falsch, ein reguläres Hexaeder (Kubus) als „Würfel“ zu bezeichnen. Der Spielwürfel ist vielmehr eine Kugel mit sechs abgeschnittenen Kugelkalotten.

Die englischen Bezeichnungen sind differenziert: das Hexaeder (der Kubus) wird als *cube* bezeichnet, der Spielwürfel als *dice*.

5 Berechnungen

Für die Berechnungen nehmen wir an, das reguläre Hexaeder habe die Kantenlänge 2. Die Kantenmittenkugel hat damit den Radius $\sqrt{2}$ und die Oberfläche 8π. Die sechs Kugelkalotten (Hauben) der Abbildung 2a haben je die Höhe $\sqrt{2}-1$ und damit den Flächeninhalt $2\pi\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$. Der Anteil der sechs Kugelkalottenflächen an der Oberfläche der Kantenmittenkugel ist daher:

$$\frac{12\pi\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{8\pi} \approx 0.87868 = 87.868\% \qquad (1)$$

Der Flächenanteil der acht roten Dreiecke der Abbildung 2b an der Kantenmittenkugel ist daher etwa 12.132%. Das ist auch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spielwürfel bei sorgfältigem, will sagen impulslosem Absetzen auf einen roten Punkt stehen bleibt.

6 Bemerkungen

Die acht roten Dreiecke der Abbildung 2b sind von Kleinkreisen begrenzt. Sie sind keine Eulersche sphärische Dreiecke, da diese von Großkreisen begrenzt sein müssen. Die berühmte Flächenformel mit dem sphärischen Exzess ist daher nicht anwendbar.

Die sechs grünen Kreisflächen der Abbildung 2b haben insgesamt einen Flächeninhalt 6π. Ihr Flächenverhältnis zur Oberfläche der Kantenmittenkugel ist daher $\frac{3}{4} = 75\%$. Für unsere Überlegungen ist das aber nicht relevant.