Hans Walser, [20200516]

Würfelverdoppelung

Idee und Anregung: Jo Niemeyer, Berlin

1 Worum geht es?

Einpassverfahren zur volumenmäßigen Verdoppelung eines Würfels.

2 Wie geht es?

Wir beginnen mit einem 3×3-Quadrat (Abb.1a) und markieren darin ein 2×3-Rechteck (Abb. 1b).

Abb. 1: Quadrat und Rechteck

Nun bewegen wir das Rechteck, und zwar so, dass die obere Kante durch den oberen der beiden schwarz markierten Punkte verläuft und die rechte Kante durch den unteren. Die Abbildung 2 zeigt zwei Positionen.

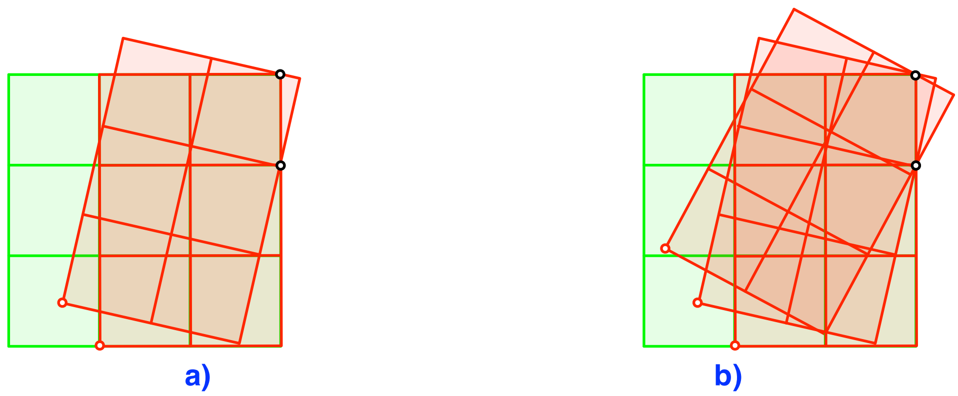
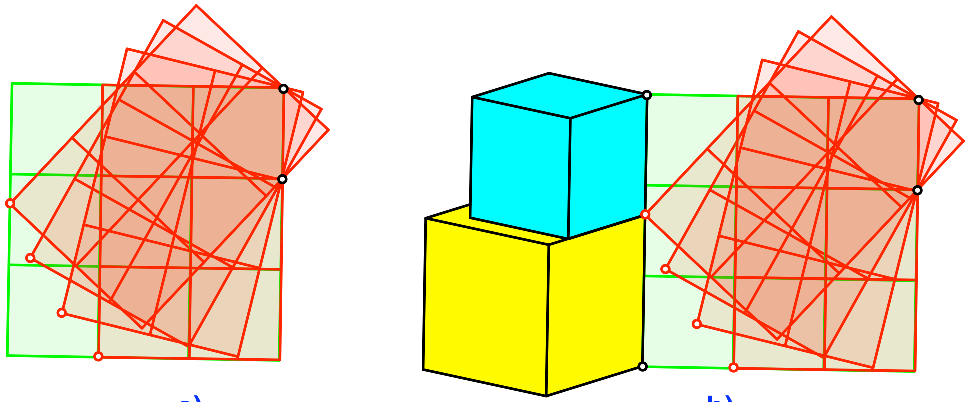


Abb. 2: Bewegen des Rechteckes

Das machen wir so lange, bis die untere linke Ecke des Rechteckes an der linken Würfelkante ankommt (Abb. 3a).



a) b)

Abb. 3: Anschlag und Würfel

Nun haben wir die Daten für das Kantenverhältnis der beiden Würfel mit dem gesuchten Volumenverhältnis 1:2 (Abb. 3b).

3 Verifikation und Beweis

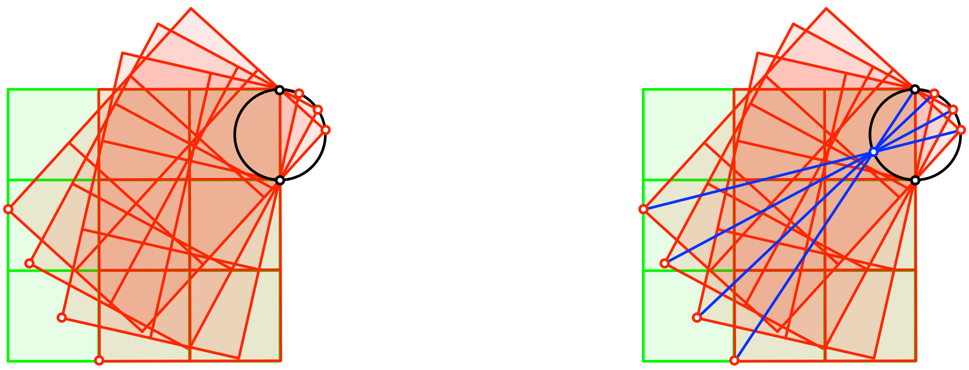
Verifikation mit DGS

Formaler Beweis mit CAS

4 Bemerkungen

4.1 Thaleskreis und Schnittpunkt

Die rechten oberen Ecken der Rechtecke bewegen sich auf dem Thaleskreis über den beiden schwarz markierten Punkten (Abb. 4a).



a) b)

Abb. 4: Thaleskreis und Schnittpunkt

Die eingezeichneten blauen Rechteckdiagonalen verlaufen alle durch einen gemeinsamen Punkt (Abb. 4b). Dieser Punkt liegt ebenfalls auf dem Thaleskreis. Nachweis mit Kreiswinkelsätzen.

4.2 Bahnkurve

Die Bahnkurve der linken unteren Rechteckecken sieht aus wie ein Kreis (Abb. 5), es ist aber kein Kreis.

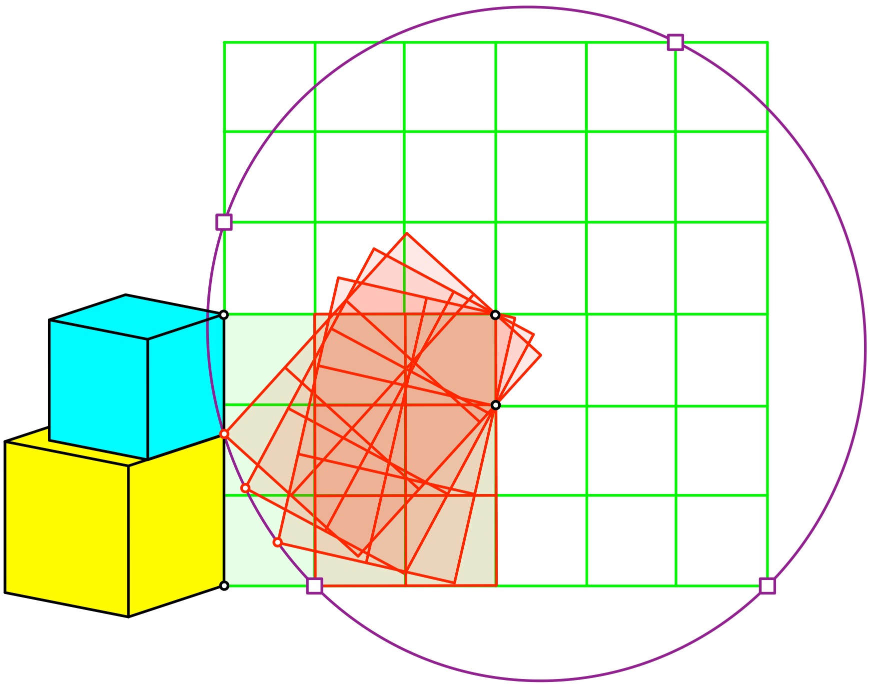


Abb. 5: Bahnkurve

Die Bahnkurve verläuft durch die vier eingezeichneten Gitterpunkte. Diese liegen aber nicht auf einem Kreis.

5 Räumliche Darstellung

Mit quadratischen Fliesen legen wir ein 6×4-Schachbrett aus (Abb. 6) als Basis.

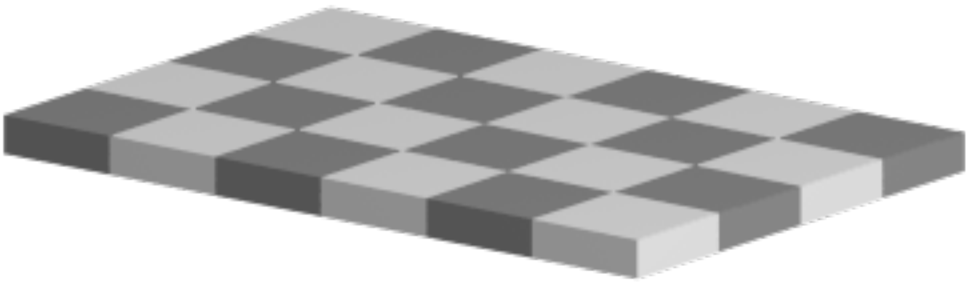


Abb. 6: Schachbrett als Basis

Wir ersetzen neun Fliesen so, dass ein 3×3-Quadrat sichtbar wird (Abb. 7).

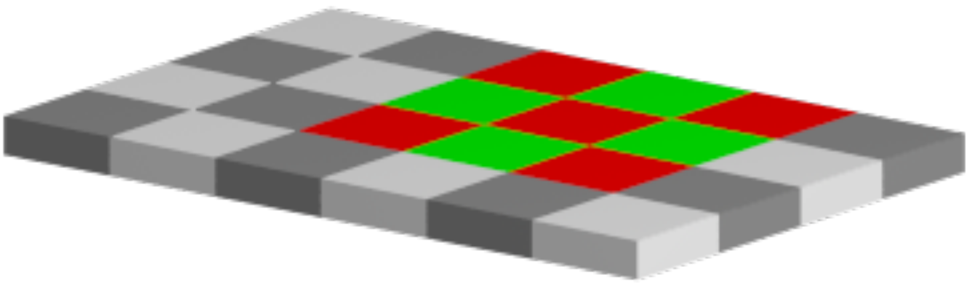


Abb. 7: 3×3-Quadrat

In einer zweiten Ebene setzen wir ein 2×3-Rechteck zusammen (Abb. 8).

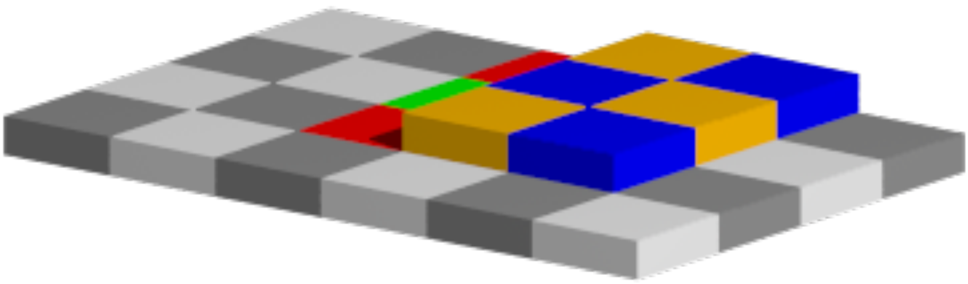


Abb. 8: Rechteck

In derselben Ebene kleben wir zwei schwarze Platten an die Basis (Abb. 9). Diese benötigen wir später als Führungselemente.

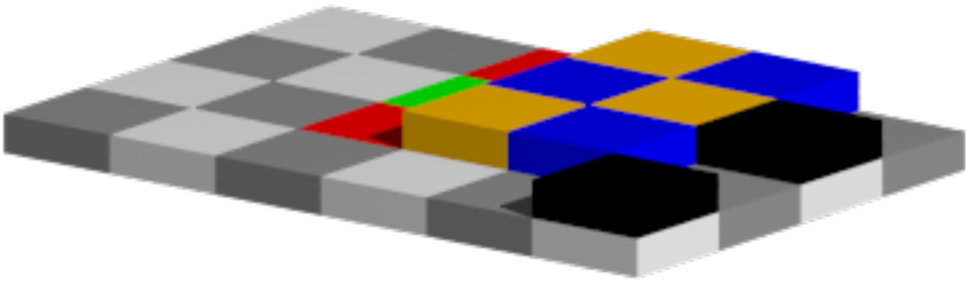


Abb. 9: Führungselemente

Nun passen wir das Rechteck so ein, dass zwei Seiten an je einem Führungselement anstoßen und eine Ecke am Rand des 3×3-Quadrats (Abb. 10).

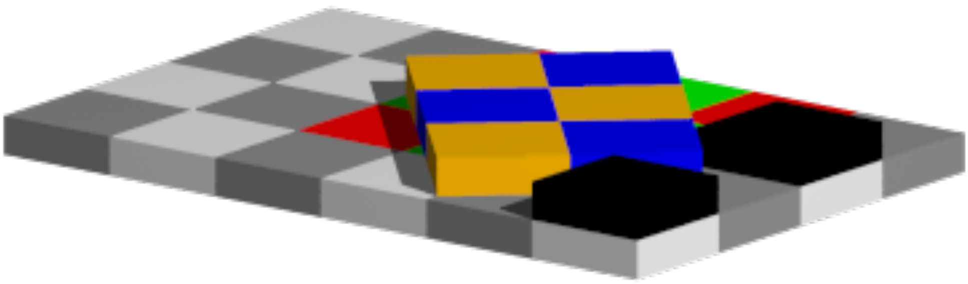


Abb. 10: Einpassen des Rechteckes

Die Abbildung 11 zeigt die Situation von oben.

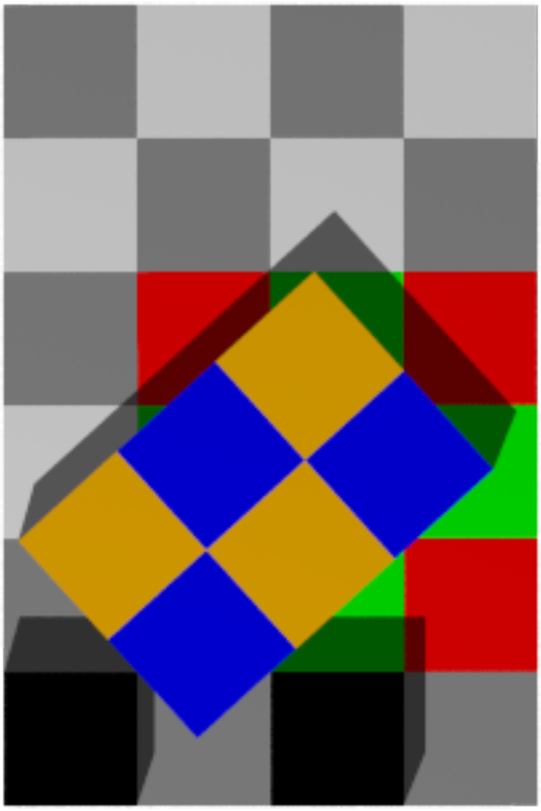


Abb. 11: Sicht von oben

Nun haben wir die Kantenlängen von zwei Würfeln mit dem Volumenverhältnis 1:2. Die Abbildung 12 zeigt die Situation von oben. Die beiden Würfel erscheinen als Quadrate.

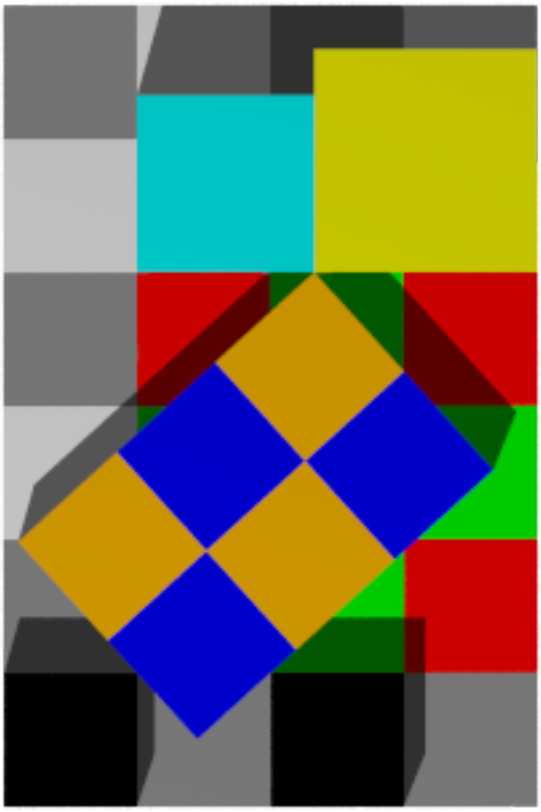


Abb. 12: Die beiden Würfel. Sicht von oben

Die Abbildung 13 zeigt eine Ansicht.

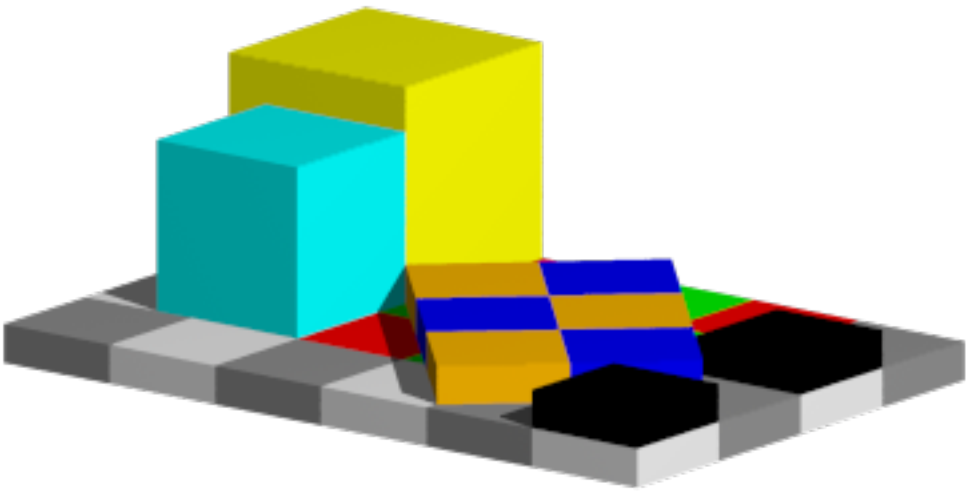


Abb. 13: Die beiden Würfel

Websites

Hans Walser: Würfelverdoppelung
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Wuerfelverdoppelung/Wuerfelverdoppelung.htm

Hans Walser: Würfelverdoppelung mit Stern und Spirale
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Wuerfelverdoppelung2/Wuerfelverdoppelung2.htm