Hans Walser, [20200603]

$y' = \cos(y)$

Ich weiß, man sollte nie eine Formel als Titel verwenden.

1 Worum geht es?

Herleitung und Illustration der Differentialgleichung:

$$y' = \cos(y) \tag{1}$$

2 Nord-Ost auf der Plattkarte

Auf der Plattkarte (Abb. 1) ist das Richtungsfeld Nord-Ost eingezeichnet.

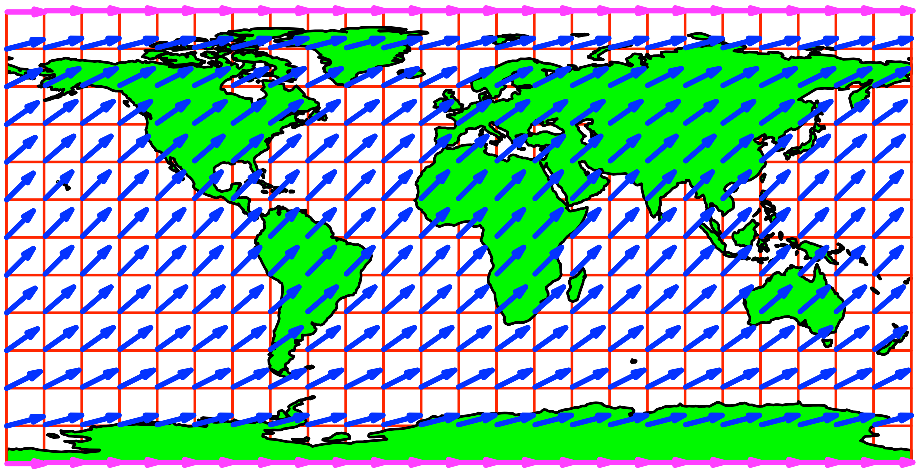

Abb. 1: Nord-Ost

Da – mit Ausnahme des Äquators – die West-Ost-Verzerrung größer ist als die Süd-Nord-Verzerrung, schließen die Richtungspfeile mit den Breitenkreisen Winkel α ein, die kleiner als 45° sind. Auf der geografischen Breite ϕ haben wir für die Nord-Ost-Richtung den Winkel:

$$\alpha = \arctan(\cos(\phi)) \tag{2}$$

Die Richtungspfeile haben also die Steigung $\cos(\phi)$.

3 Differentialgleichung

Aus (2) ergibt sich für das Richtungsfeld der Abbildung 1 die Differentialgleichung (1). Die Abbildung 2 zeigt eine Lösungskurve.

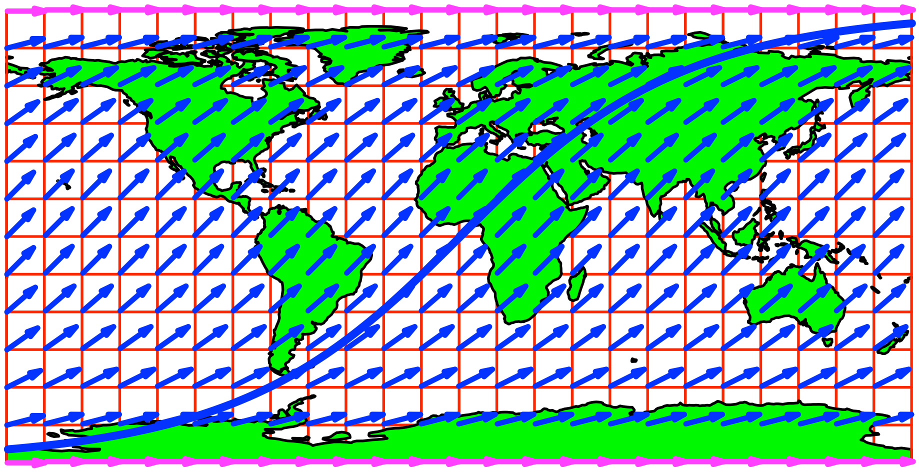

Abb. 2: Lösungskurve

Die eingezeichnete Lösungskurve hat die Gleichung:

$$y = f(x) = \arctan(\sinh(x)) \tag{3}$$

Nachweis:
Aus (3) ergibt sich durch Ableiten:

$$f'(x) = \frac{1}{\sinh^2(x)+1}\cosh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}\cosh(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \tag{4}$$

Wegen

$$\cos(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(t)}} \tag{5}$$

ist andererseits:

$$\cos(f(x)) = \cos(\arctan(\sinh(x))) = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(x)}} = \frac{1}{\cosh(x)} \tag{6}$$

Aus (4) und (6) folgt die Gültigkeit der Lösung (3).

4 Vergleich mit der arctan-Kurve

Der Autor hat zunächst die arctan-Kurve als Lösungskurve vermutet und war über das Auftreten der inneren sinh-Funktion etwas erstaunt.

Die Abbildung 3 zeigt den Vergleich. Die Lösungskurve (3) ist blau, die arctan-Kurve rot gezeichnet. Die blaue Lösungskurve geht viel rascher an die Asymptote heran. Das hängt damit zusammen, dass die sinh-Funktion im Wesentlichen exponentiell wächst.

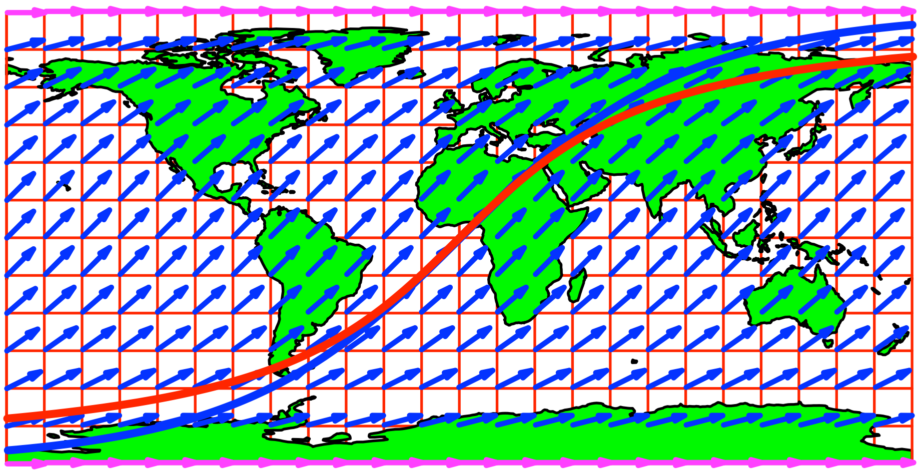

Abb. 3: Vergleich

Die Abbildung 4 zeigt einen größeren Ausschnitt.

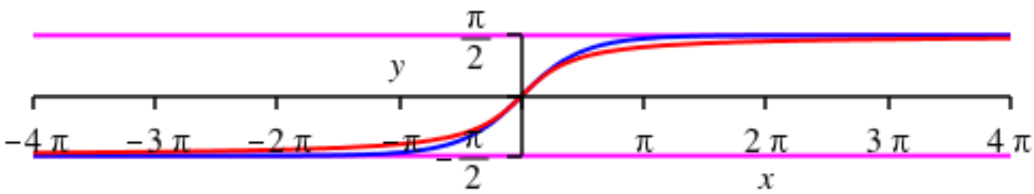

Abb. 4: Größerer Ausschnitt