

Hans Walser, [20191012]

## Zick-Zack im Winkel

Anregung: Fehlmann (2019)

### 1 Worum geht es?

Die Grundidee der Winkeldrittung nach Archimedes oder Bolyai führt zu einem Schließungssatz in der Elementargeometrie.

### 2 Der Zick-Zack im Winkel

In einem beliebigen Winkel  $\alpha$  tragen wir vom Scheitel ausgehend im Zick-Zack dieselbe Streckenlänge ab (Abb. 1).

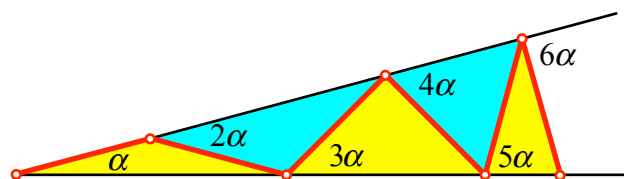


Abb. 1: Zick-Zack im Winkelfeld

Wir erhalten dann der Reihe nach die Winkel  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$ . Der Beweis ergibt sich aus den in der Abbildung 1 eingetragenen gleichschenkligen Dreiecken. Die Ergänzung des Spitzenwinkels auf  $180^\circ$  ist jeweils die Summe der beiden Basiswinkel.

Der Sachverhalt wird ausgenutzt in den Winkeldrittungsmethoden von Archimedes und von Bolyai ([1] Abb. 5). Das mechanische Gerät ([1] Abb. 6) kann entsprechend verallgemeinert werden für die Winkelteilung in  $n$  Teile.

### 3 Schließungssatz

Wir nehmen nun an, dass wir beim Abtragen des Zick-Zackes nach einer ungeraden Anzahl Schritten zum Scheitel zurückkommen (Abb. 2 für  $u = 7$ ).

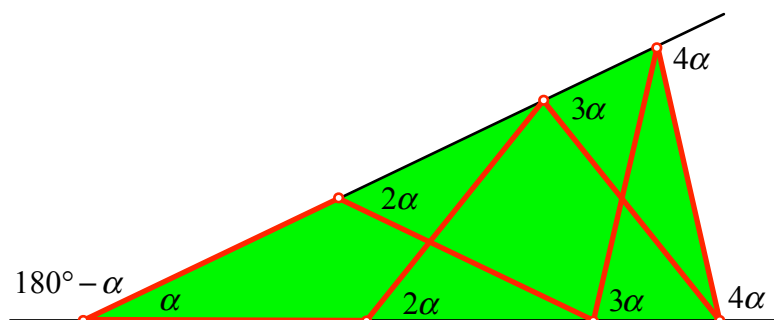


Abb. 2: Zurück nach sieben Schritten

Im grün markierten gleichschenkligen Dreieck der Abbildung 2 haben wir die Außenwinkel  $4\alpha, 4\alpha, 180^\circ - \alpha$ . Somit haben wir die Außenwinkelsumme  $7\alpha + 180^\circ$ . Da die Außenwinkelsumme in einem einfach geschlossenen Polygon  $360^\circ$  ausmacht (eine wunderschöne Invariante, die leider im LP21 nicht vorkommt), ergibt sich:

$$\begin{aligned}7\alpha + 180^\circ &= 360^\circ \\ \alpha &= \frac{180^\circ}{7}\end{aligned}\tag{1}$$

Dieser Winkel ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Hingegen kann der Winkel mit einem Gleitgelenkmodell konstruiert werden [2].

Allgemein ergibt sich für eine Schließungsfigur mit  $u$  Schritten  $\alpha = \frac{180^\circ}{u}$  (Fehlmann 2019).

## Literatur

Fehlmann, René (2019): Ein Zick-Zack-Streckenzug im gleichschenkligen Dreieck. VSMP Bulletin, September 2019, No 141, S. 10-13.

Walser, Hans (1988): Ein Schliessungssatz der Elementargeometrie. Elemente der Mathematik (43), 161-169.

## Websites

[1] Hans Walser: Winkeldrittung nach Archimedes und nach Bolyai

[www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung\\_Arc\\_Bol/Winkeldrittung\\_Arc\\_Bol.htm](http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Winkeldrittung_Arc_Bol/Winkeldrittung_Arc_Bol.htm)

[2] Hans Walser: Gleitgelenkmodelle

[www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/G/Gleitgelenkmodelle/Gleitgelenkmodelle.htm](http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/G/Gleitgelenkmodelle/Gleitgelenkmodelle.htm)