Hans Walser, [20180529]

Zylinderstapel

1 Worum geht es?

Stehende Zylinder mit dem Radius $\frac{1}{2}$ und der Höhe 1 sollen so gestapelt werden, dass ihre Mittelpunkte ein flächenzentriertes kubisches Punktgitter ergeben.
Die Zylinder können als „Inzylinder“ von Einheitswürfeln gesehen werden.

2 Quadratische Basis

2.1 Berechnung

Die Abbildung 1 zeigt das Minimalmodell mit quadratischer Basis der Stapelung.

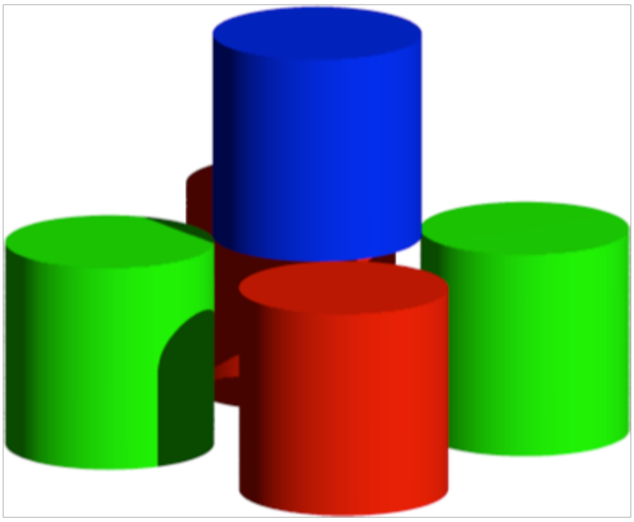


Abb. 1: Quadratische Basis

Die Bedingung für ein flächenzentriertes kubisches Punktgitter verlangt, dass die Abstände zwischen den Zylindermittelpunkten alle gleich lang sind.
Die durch die Abstände x gebildete Pyramide hat die Höhe 1. Damit erhalten wir die Bedingung:

$$x = \sqrt{\left(\tfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{x}{2}\right)^2 + 1} \tag{1}$$

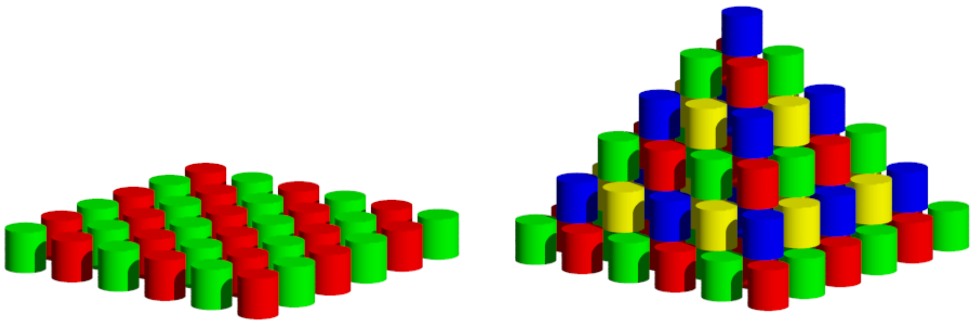
Dies führt zur positiven Lösung:

$$x = \sqrt{2} \tag{2}$$

Wir sehen in der Abbildung 1, dass die Zylinder nicht eigentlich gestapelt sind. Der blaue Zylinder sitzt auf den Kanten der darunter liegenden Zylinder und würde bei Wirken der Schwerkraft zwischen den roten und grünen Zylindern hinunterrutschen, es sei denn, man stelle einen Stützzylinder darunter.

2.2 Pyramide

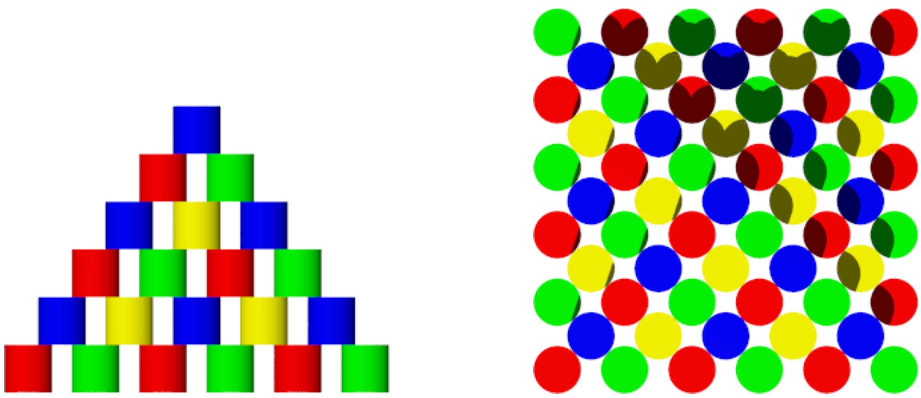
Die Abbildung 2 zeigt eine größere Basis und die Pyramide.



a) b)

Abb. 2: Pyramide

Die Abbildung 3 zeigt die Situation von vorne und von oben. Bei der Abbildung 3a meinen wir, eine Wand von aufgestapelten Dosen wie beim Dosenschießen an der Geburtstagsparty zu sehen. Tatsächlich liegt aber schon die zweitunterste Reihe nach hinten versetzt, wie aus der Abbildungen 2b und 3b ersichtlich ist.

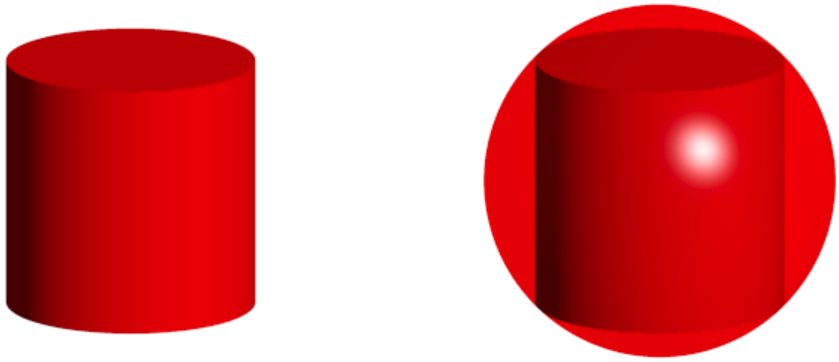


a) b)

Abb. 3: Von vorne und von oben

2.3 Umkugel

Wir legen um die Zylinder (Abb. 4a) die Umkugel (Abb. 4b).



a) b)

Abb. 4: Umkugel

Das hat zur Folge dass die nun vergrößerten Figuren nicht mehr an den Kanten abrutschen können. Die Umkugeln haben den Durchmesser $\sqrt{2}$. Das heißt dass sie sich gegenseitig berühren. Wir erhalten die dichteste Kugelpackung (Abb. 5).

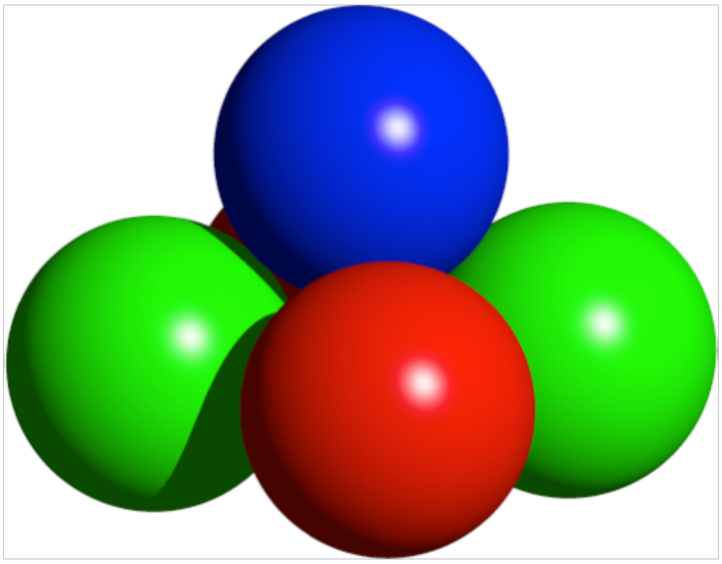
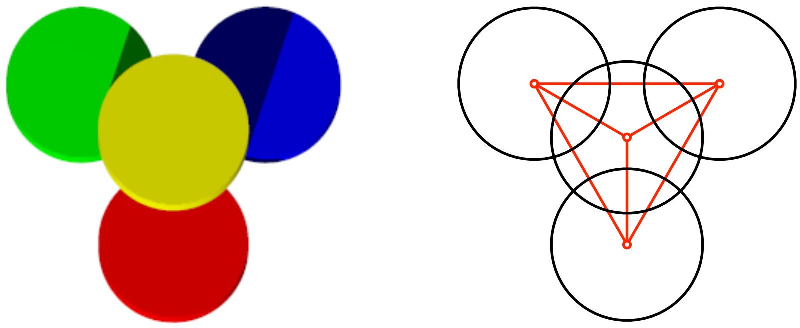


Abb. 5: Dichteste Kugelpackung

3 Dreieckige Basis

3.1 Berechnung

Die Abbildung 6 zeigt das Minimalmodell für den Fall einer dreieckigen Basis von oben. Die Zylinder sind nun echt aufeinandergestapelt.



a) b)

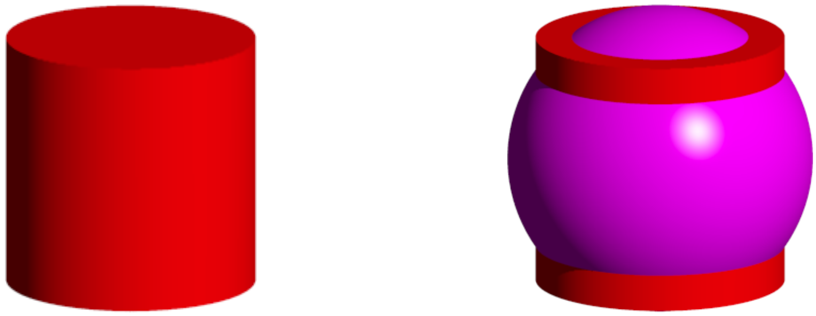
Abb. 6: Dreieckige Basis

Die Zylindermittelpunkte müssen die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders bilden (Abb. 6b). Dieser Tetraeder hat die Höhe 1. Für die rote Kantenlänge x des Tetraeders ergibt sich:

$$x = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \approx 1.2247 \tag{3}$$

3.2 Kugelpackung?

Wegen $x = \sqrt{\tfrac{3}{2}} < \sqrt{2}$ durchschneiden sich die Umkugeln der Zylinder. Für eine Kugelpackung müssen wir mit kleineren Kugeln arbeiten, welche die Zylinder durchschneiden (Abb. 7).

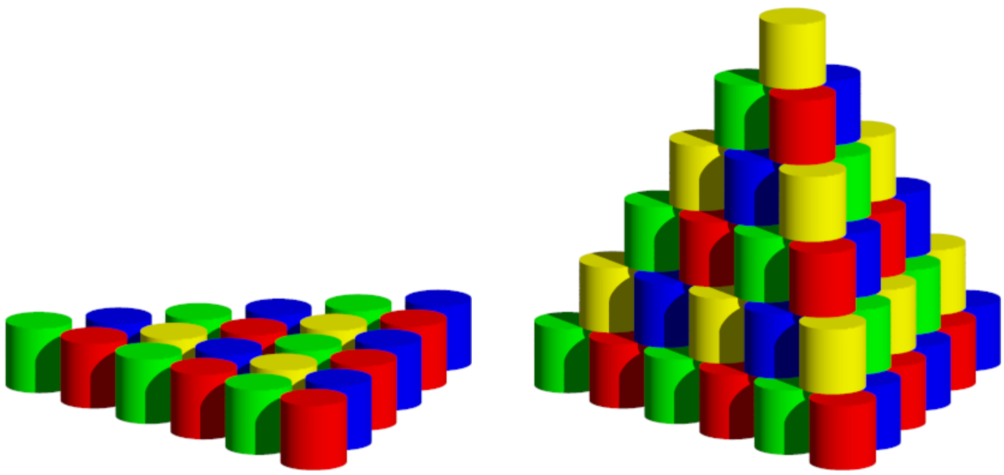


a) b)

Abb. 7: Kugel für Kugelpackung

3.3 Tetraeder

Die Abbildung 7 zeigt die Basis und den Tetraeder.



a) b)

Abb. 7: Basis und Tetraeder

Die Abbildung 8 zeigt die Situation von der Seite und von oben.

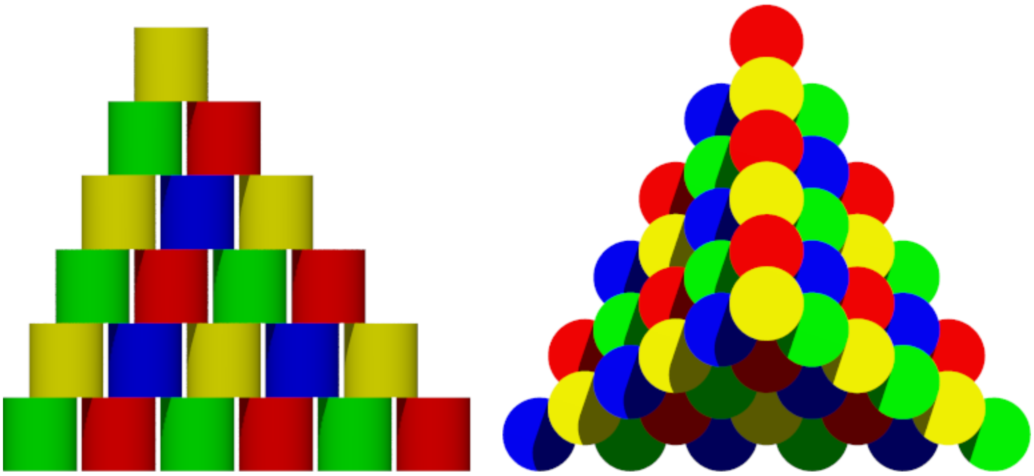


Abb. 8: Von der Seite und von oben

Website

Hans Walser: Würfelstapel (abgerufen 30.05.2018):
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Wuerfelstapel/Wuerfelstapel.htm