

# Symmetrie als Invarianz



---

HANS WALSER

---

Symmetrie wird im Unterricht oft nur im geometrischen Sinn einer Axialsymmetrie behandelt. Der Begriff Symmetrie deckt aber ein viel weiteres Feld ab, das über die geometrischen Visualisierungen hinausreicht. Symmetrie kann allgemein als Invarianz von Maßen, Strukturen und Methoden verstanden werden. Im folgenden Beitrag werden exemplarisch einige Symmetrie-Spielereien im Kontext von Quadraten dargestellt.

## 1 Der gute alte PYTHAGORAS

Der Witz des Satzes von Pythagoras ist nicht, dass (in der üblichen Notation)  $a^2 + b^2 = c^2$  ist, sondern dass  $a^2 + b^2$  gleich groß bleibt, auch wenn der Punkt  $C$  in der Zwischenzeit auf

dem Thaleskreis bewegt wurde (Abb. 1). Die invariante Flächensumme ist eine Symmetrie im Sinne des Gleichmaßes. – Die Gleichheit mit dem Hypotenusenquadrat ergibt sich als Grenzfall, wenn der Punkt  $C$  gegen den Punkt  $A$  oder gegen den Punkt  $B$  strebt.

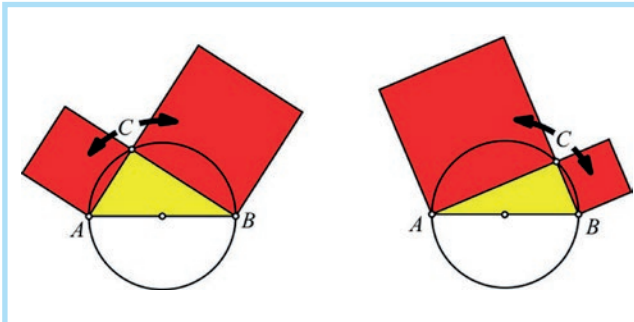


Abb. 1. Invariante Flächensumme

Im Unterricht wird der Satz des Pythagoras oft mit horizontaler Hypotenuse dargestellt. Der Punkt  $C$  bewegt sich auf dem Thaleskreis. Dies entspricht einem Weltbild mit einer festen horizontalen Erde (die Hypotenuse) und einer Sonne  $C$ , welche bei  $A$  im Osten aufgeht, den Sonnenkreis beschreibt und dann im Westen bei  $B$  untergeht. Nun ja, und in der Nacht geht sie untendurch zurück.

## 2 Die kopernikanische Wende

KOPERNIKUS sah das anders: der Punkt  $C$  bleibt als Sonne fest, die Hypotenuse (also die Erde) dreht sich (Abb. 2). Man kann die Erde als sich drehenden Propeller  $AB$  interpretieren.

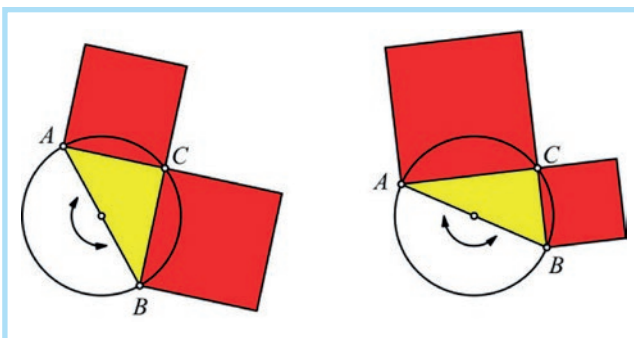


Abb. 2. Die Erde dreht sich.

Natürlich ist dies nur eine andere Sicht auf den Satz des PYTHAGORAS. Nun ist aber die Sonne sehr weit weg, jedenfalls nicht mehr auf dem Thaleskreis (Abb. 3). Obwohl man kein rechtwinkliges Dreieck mehr hat, bleibt die Flächensumme der beiden roten Quadrate invariant. Also wiederum eine Symmetrie.

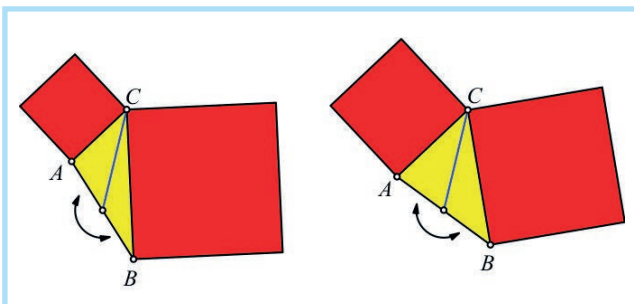


Abb. 3. Rot bleibt rot.

Das irritiert, da wir so sozialisiert worden sind, dass die Invarianz der Flächensumme beim rechtwinkligen Dreieck gilt. Aber eben nicht nur. Für den Beweis der Invarianz der Flächensumme in diesem Beispiel wird der Kosinus-Satz verwendet.

## 3 APOLLONIUS und AL SIJZI

Mit den Bezeichnungen der Abbildung 4 gilt nach dem Kosinus-Satz

$$a^2 = s_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2s_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos(\varphi),$$

$$b^2 = s_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2s_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos(\varphi).$$

Das geänderte Vorzeichen in der zweiten Formelzeile kommt daher, dass der Winkel  $\varphi$  nun der Außenwinkel des betrachteten Dreiecks ist.

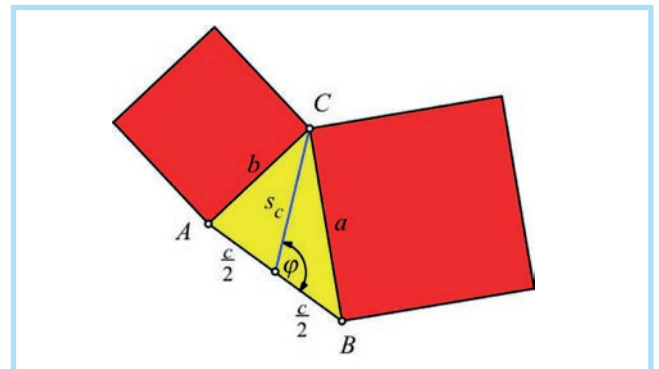


Abb. 4. Bezeichnungen

Als Schüler habe ich mich immer über das Minuszeichen in der Formel des Kosinus-Satzes gewundert. Ich empfand das als krassen Schönheitsfehler. Dieser Schönheitsfehler kommt daher, dass mit dem Innenwinkel statt mit dem Außenwinkel gearbeitet wird. Für fast alle geometrischen Winkelbeziehungen wäre es aber sinnvoll, mit dem Außenwinkel im Sinne einer Richtungsänderung zu arbeiten. So ist zum Beispiel die Außenwinkelsumme eines beliebigen Vieleckes  $360^\circ$ ; es gilt also eine invariante Formel für beliebige Eckenzahlen. Bei der Innenwinkelsumme müssen die Ecken abgezählt werden, und für jede Eckenzahl gilt eine andere Formel. Das Außenwinkelkonzept ist dann auch aufwärtskompatibel mit dem Krümmungsbegriff in der Differentialgeometrie.

Bei der Addition der beiden Formelzeilen nach dem Kosinus-Satz fällt der Anteil mit dem variablen Drehwinkel  $\varphi$  weg. Es bleibt

$$a^2 + b^2 = 2s_c^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

übrig. Da beim Drehprozess die rechte Seite invariant bleibt, gilt dies auch für die Quadratflächensumme der linken Seite.

Diese Flächensummeninvarianz geht auf APOLLONIUS VON PERGE sowie den arabischen Mathematiker AL SIJZI zurück. Die Abbildung 5 gibt eine Visualisierung dazu. Die beiden dunkelblauen

Quadrate haben die Seitenlänge  $s_c$ , die beiden hellblauen die Seitenlänge  $\frac{c}{2}$ .

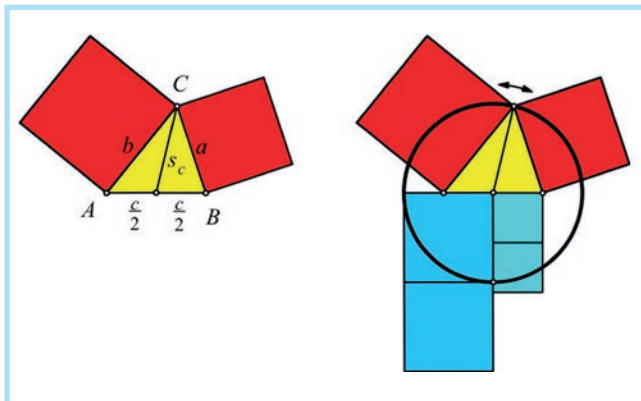


Abb. 5. Rot = blau

Statt den Propeller  $AB$  um seinen Mittelunkt zu drehen, kann man auch den Punkt  $C$  auf dem Kreis mit dem Radius  $s_c$  bewegen. Die Summe der roten Quadratflächen bleibt invariant, da sich die blauen Quadrate nicht ändern.

Im Sonderfall eines rechtwinkligen Dreiecks ergibt sich die Figur der Abbildung 6. Der blaue Teil wird zum Hypotenusenquadrat, und man erhält den Satz des PYTHAGORAS zurück. Damit ist die Welt wieder in Ordnung.

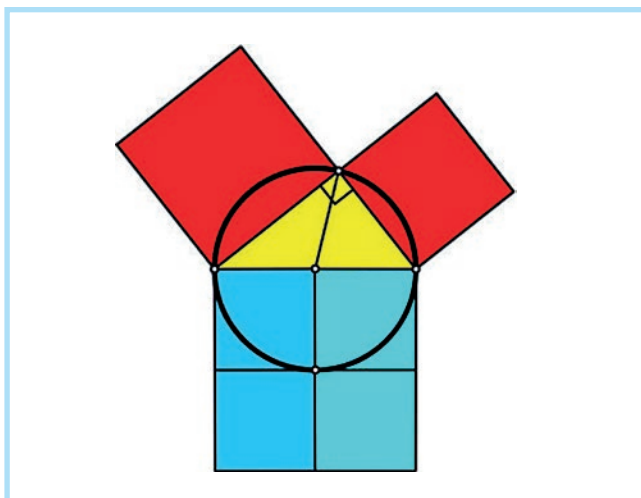


Abb. 6. Rechtwinkliges Dreieck

Dies ist allerdings kein gültiger Beweis für den Satz des PYTHAGORAS, da bei der Herleitung der Kosinus-Satz und damit implizit der Satz des PYTHAGORAS genutzt wurde.

## 4 Umbau der Figur

Die Figur der Abbildung 5 ist, was den blauen Teil betrifft, etwas unschön. Man kann aber die Figur umbauen, ohne dass sich die Flächenverhältnisse ändern. Dazu zerlegt man das Dreieck durch die Schwerlinie  $s_c$  in zwei Teile. Diese Teile kann man in anderer Anordnung oben ansetzen (Abb. 7). Im mecha-

nischen Modell (Abb. 8) kann das Dreieck mit einem Gelenk umgeklappt werden.

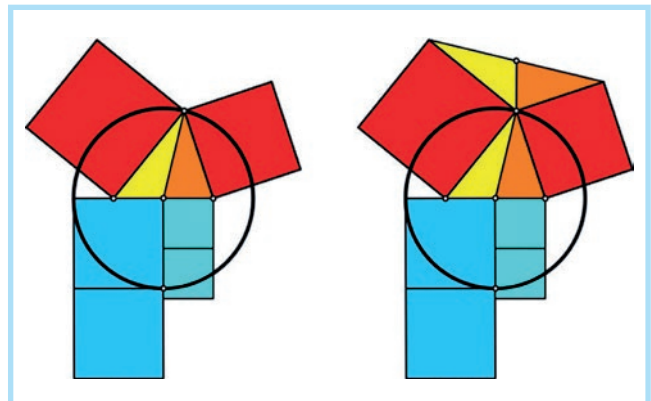


Abb. 7. Ansetzen des umgeklappten Dreiecks

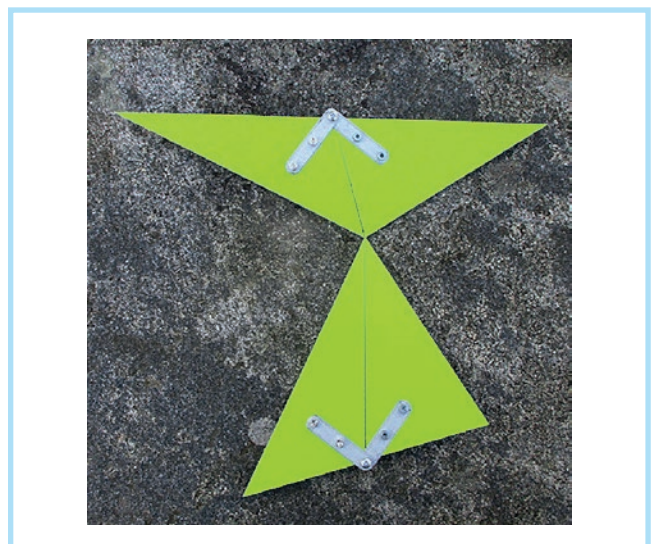


Abb. 8. Umklappmodell

Nun kann man zunächst die dunkelblauen Quadrate anders platzieren und anschließend die hellblauen Quadrate (Abb. 9).

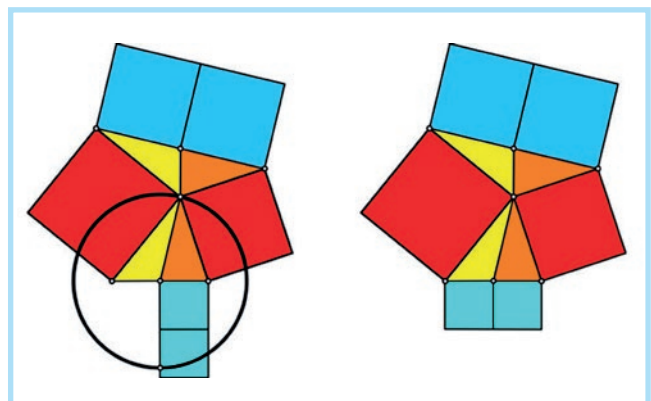


Abb. 9. Andere Anordnung der blauen Quadrate

Man erhält nun einerseits zwei rote Quadrate und andererseits zwei blaue Rechtecke mit dem Seitenverhältnis 2:1, also

Doppelquadrate. Um eine größere begriffliche Symmetrie zu erhalten, werden die blauen Rechtecke in Quadrate umbaut. Dazu schneidet man außen die Ecken ab und setzt sie innen wieder an (Abb. 10). Beim hellblauen Rechteck geht dies problemlos, beim dunkelblauen kommt es zu Überschneidungen mit den roten Quadraten. Daher sind die Farben nun transparent gewählt. Auf Grund der Herleitung aus der Figur des APOLLONIUS ist die Flächensumme der beiden blauen Quadrate gleich der Flächensumme der beiden roten Quadrate.

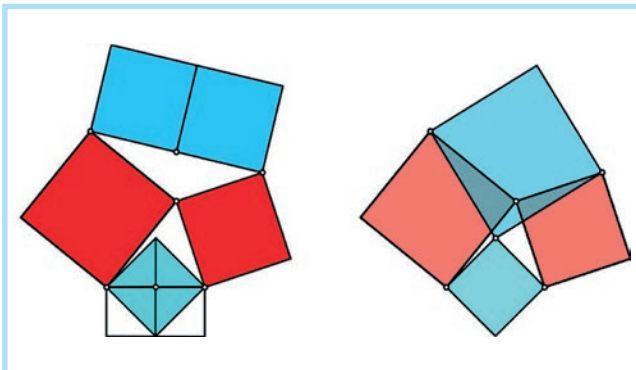


Abb. 10. Umbau der Rechtecke, Schließungsfigur

Zudem geschieht etwas Erstaunliches. Die blauen Quadrate haben ebenfalls eine Ecke gemeinsam. Es ergibt sich eine Schließungsfigur. Man hätte also ebenso gut mit den beiden blauen Quadraten beginnen können. Die Figur hat eine strukturelle Symmetrie.

## 5 Beweis der Schließungsfigur

Die Schließungsfigur lässt sich mit einiger Vektorrechnung beweisen (WALSER, 2021). Schöner ist aber der folgende Beweis mit Drehstreckungen, den ich ANTON GFRERRER, TU Graz, verdanke. Dazu wird angenommen, die Figur schließe sich nicht (Abb. 11). Man arbeitet also mit falschen Figuren, versucht aber, richtig zu überlegen.

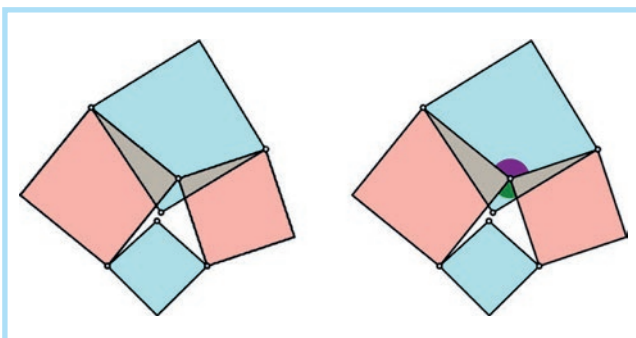


Abb. 11. Gegenteilige Annahme, Ergänzungswinkel

Aus der Konstruktion mit den zwei roten Quadraten folgt, dass sich die beiden violett und grün markierten Winkel auf  $180^\circ$  ergänzen. Nun bildet man das violett markierte Dreieck (Abb. 12) mit einer Drehstreckung ab. Das Zentrum der Drehstreckung ist der schwarz markierte Punkt, der Drehwinkel  $45^\circ$  im Uhr-

zeigersinn und der Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Dadurch wird die Ecke mit dem markierten Winkel auf den Mittelpunkt des Quadrates links abgebildet.

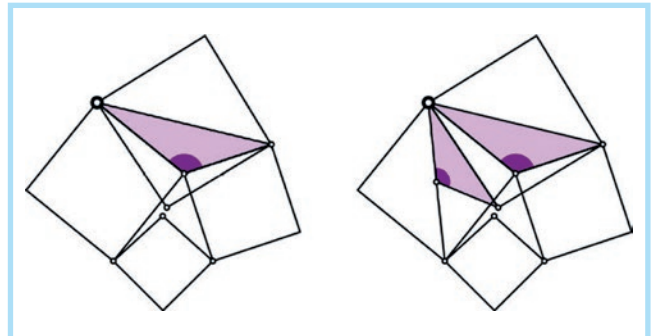


Abb. 12. Drehstreckung

Entsprechend arbeitet man mit einer zweiten Drehstreckung (Abb. 13). Das Zentrum ist wiederum schwarz markiert, der Drehwinkel  $45^\circ$  nun im Gegenuhrzeigersinn und der Faktor wiederum  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Die Ecke mit dem grün markierten Winkel kommt ebenfalls in den Mittelpunkt des linken Quadrates zu liegen.

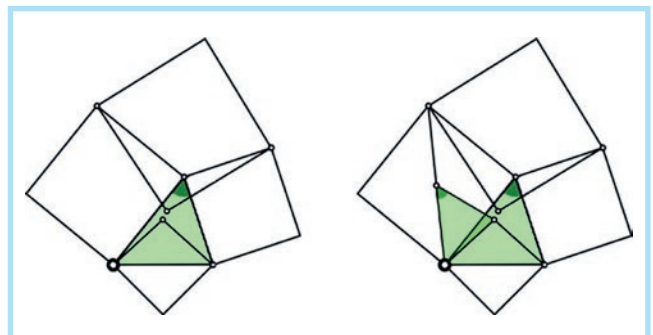


Abb. 13. Zweite Drehstreckung

In der Überlagerung der beiden Abbildungen 12 und 13 erscheint eine Lücke zwischen dem violetten und dem grünen Winkel (Abb. 14). Das kann aber nicht sein, da sich diese beiden Winkel auf  $180^\circ$  ergänzen. Damit ist die Schließungsfigur bewiesen.

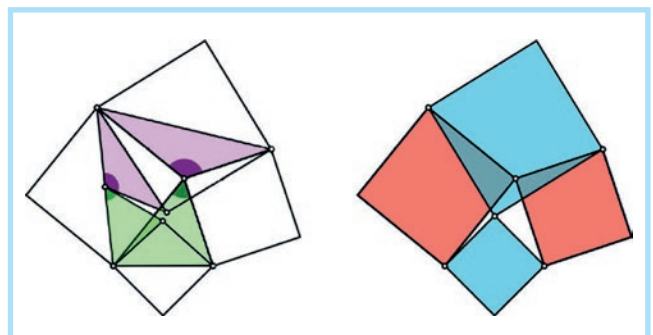


Abb. 14. Lücke, Schließungsfigur

Man kann also irgend zwei rote Quadrate an einer Ecke in einem beliebigen Winkel aneinanderfügen und zwischen die anschließenden Ecken diagonal zwei blaue Quadrate einpassen. Diese haben ebenfalls eine Ecke gemeinsam.

### 6 Papillon

Die Schließungsfigur hat schöne Eigenschaften. Die Umkreise der vier Quadrate verlaufen durch einen gemeinsamen Punkt (Abb. 15). Im Schulunterricht ist es ja schon ein Anlass zur Freude, wenn drei Geraden durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen, etwa die drei Höhen eines Dreiecks. Man kann das als Struktursymmetrie sehen. Hier hat man nun sogar vier Kreise, welche durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen. Und zudem: die Mittelpunkte der Umkreise, also auch die Mittelpunkte der vier Quadrate, bilden ein weiteres Quadrat.

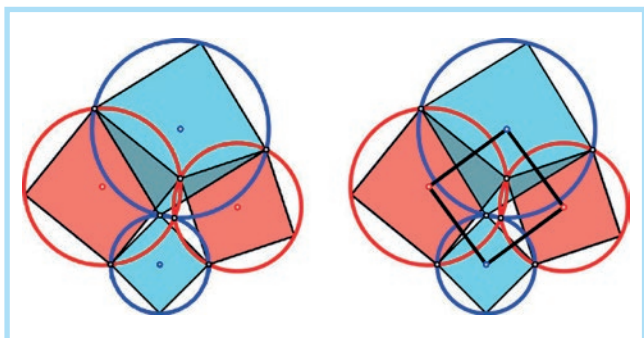


Abb. 15. Umkreise und ein weiteres Quadrat

Nun werden die Diagonalverbindungen der Außenecken (rot und blau in Abb. 16) gezeichnet. Zunächst sieht man, dass diese Diagonalverbindungen durch die Kontaktpunkte zweier gleichfarbiger Quadrate verlaufen. Drei Punkte auf ein und derselben Geraden sind aber ebenso ein Anlass zur Freude, sozusagen die duale Situation zu drei Geraden durch einen Punkt. Der dritte Punkt ist erst noch der Mittelpunkt.

Es drängen sich aber weitere Vermutungen auf. Gestaltorientierte Menschen vermuten gleich, dass die beiden Diagonalverbindungen orthogonal sind. An Maßzahlen orientierte Menschen vermuten ihrerseits, dass die beiden Diagonalverbindungen gleich lang sind. Recht haben beide.

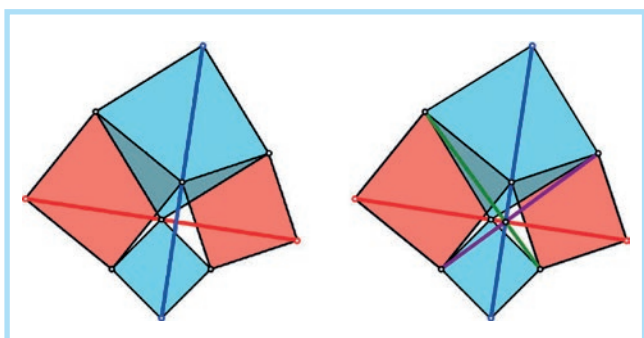


Abb. 16. Diagonalen

Die Diagonalverbindungen der rot-blau-Gelenkpunkte (violett und grün in Abb. 16) sind ebenfalls orthogonal und gleich lang und schneiden sich im Schnittpunkt der Diagonalen der Außenecken. Diese schneiden sie unter Winkeln von  $45^\circ$ . Das Längenverhältnis der langen Diagonalverbindungen zu den kurzen Diagonalverbindungen ist  $\sqrt{2} : 1$ .

Der Schnittpunkt der vier Diagonalverbindungen ist der gemeinsame Schnittpunkt der vier Umkreise (Abb. 17). Man hat also acht Linien – vier Geraden und vier Kreislinien – durch einen gemeinsamen Punkt. Das raucht vor Schönheit.

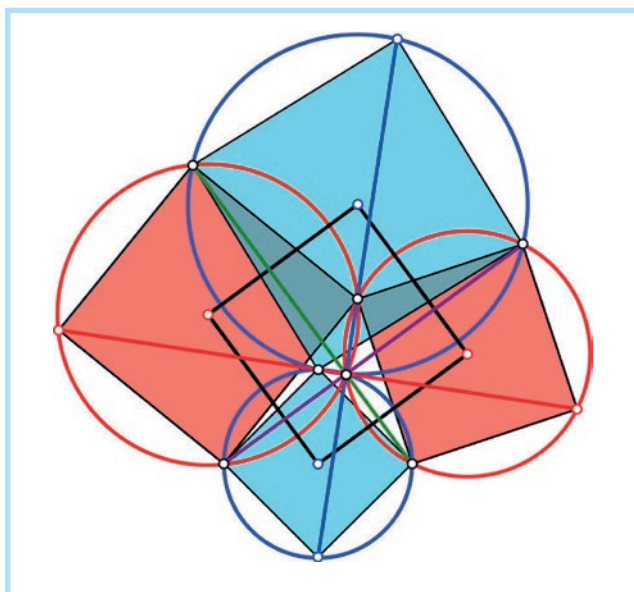


Abb. 17. Gemeinsamer Schnittpunkt

Die Schließungsfigur lässt sich iterativ zu einer Spirale zusammensetzen (Abb. 18). Das dritte und das zweite rote Quadrat verhalten sich bezüglich der Größenverhältnisse und Anordnung wie das zweite und das erste rote Quadrat. Und so weiter und so fort. Die Spirale ist vom Typ einer logarithmischen Spirale (WALSER, 2022).

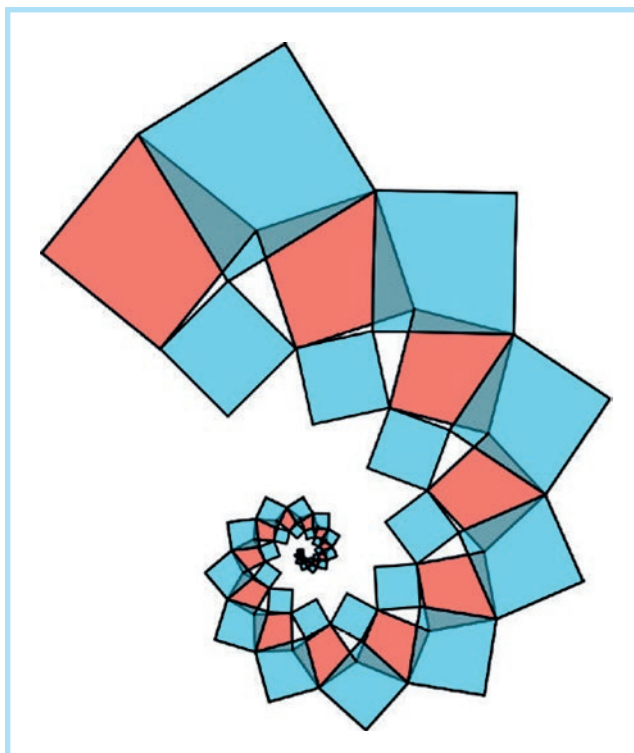


Abb. 18. Papillon-Spirale

## 7 Ähnliche Rhomben

Statt mit Quadraten kann man auch mit zueinander ähnlichen Rhomben arbeiten (Abb. 19). Es ergibt sich offenbar wieder eine Schließungsfigur.

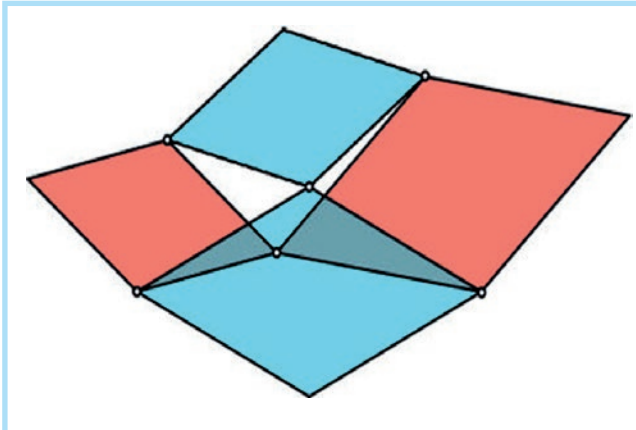


Abb. 19. Ähnliche Rhomben

Diese Schließungsfigur ist nicht einfach ein affin verzerrtes Bild der Schließungsfigur mit den Quadraten (Abb. 10 oder Abb. 14), da Quadrate bei einer affinen Abbildung keine zueinander ähnlichen Rhomben ergeben. In der Regel ergeben sich Parallelogramme, die keine Rhomben sind. Es braucht für die Schließungsfigur mit Rhomben einen eigenen Beweis. Welche Eigenschaften der Schließungsfigur mit Quadraten (Abb. 17) können auf die Schließungsfigur mit ähnlichen Rhomben (Abb. 19) übertragen werden?

### Literatur

WALSER, H. (2021). Spiel mit Quadraten. *MU*, 67(3), 17–27.

WALSER, H. (2022). *Spiralen, Schraubenlinien und spiralartige Figuren. Mathematische Spielereien in zwei und drei Dimensionen*. Heidelberg: Springer Spektrum.

HANS WALSER unterrichtete Mathematik am Gymnasium Frauenfeld (Schweiz), an der ETH Zürich und an der Uni Basel. ■ □