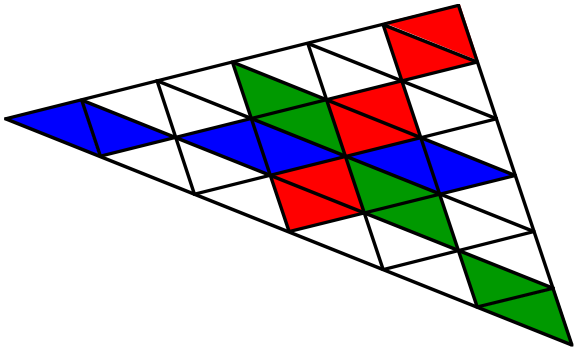
Hans Walser

Mathematik für die Sekundarstufe 1



Modul 402

Schnittpunkte im Dreieck

Lernumgebung

Inhalt

1 Schnittpunkt? 1
2 Gerade durch Schwerpunkt 3
3 Abbildungen eines Quadrates 4
4 Zentralprojektion bei Kreisen 5
5 Gemeinsamer Schwerpunkt 7
6 Minimales Wegenetz im Quadrat 8
7 Fermat-Punkt im stumpfwinkligen Dreieck 8
8 Wegenetz im regelmäßigen Fünfeck 9
9 Wegenetz im allgemeinen Fünfeck 11
10 Innenkreis 13
11 Innenellipse 14
12 Schnittpunkt? 15
13 Schnittpunkt? 16
14 Ceva und Winkel 17

Modul 402 für die Lehrveranstaltung: *Mathematik für die Sekundarstufe 1*

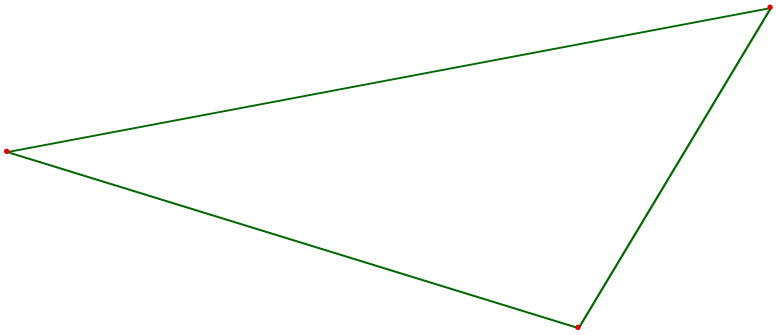
Sommer 2006 Probeausgabe
Frühjahr 2008 MathType. Erweiterungen
Frühjahr 2010 Erweiterung

last modified: 6. Juni 2014

Hans Walser
www.walser-h-m.ch/hans

1 Schnittpunkt?

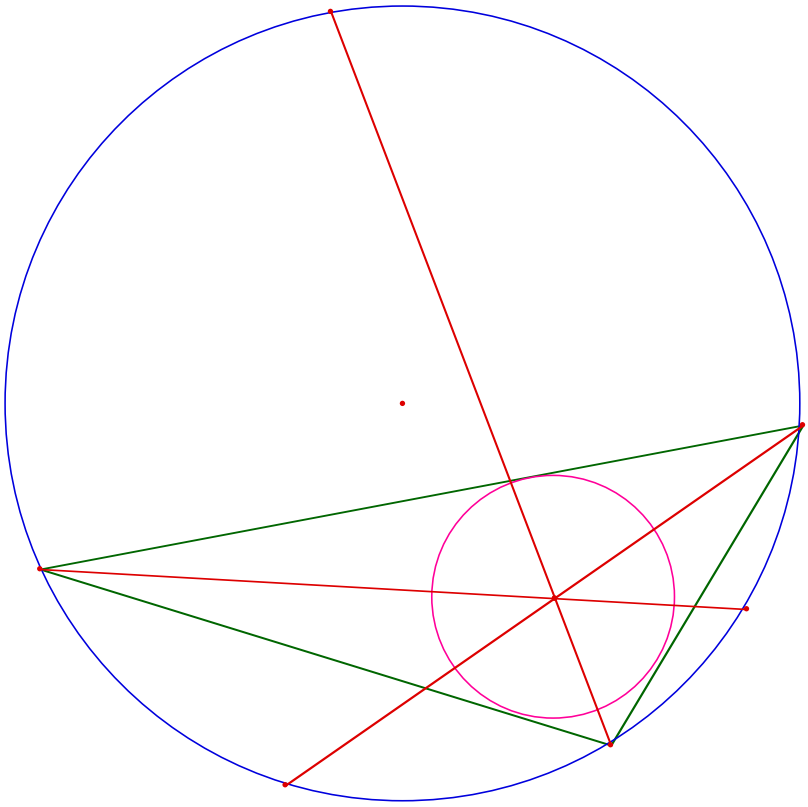
Wir zeichnen zu einem Dreieck dessen Umkreis und halbieren die Bögen über jeder Seite. Dann verbinden wir diese Bogenmitten mit den gegenüberliegenden Dreiecks-punkten. Und?



Und?

Ergebnis

Die Verbindungslinien sind die Winkelhalbierenden des Dreieckes. Sie sind kopunktal, ihr Schnittpunkt ist der Inkreismittelpunkt.



Winkelhalbierende

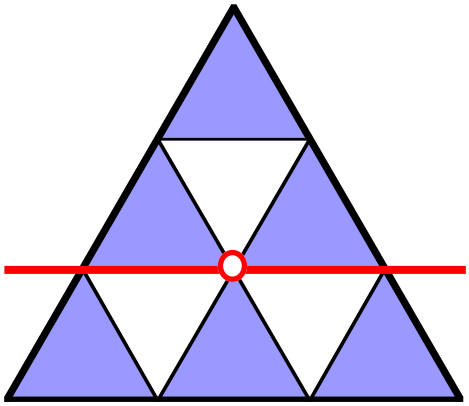
2 Gerade durch Schwerpunkt

Beweisen oder widerlegen Sie: Eine Gerade durch den Schwerpunkt eines Dreieckes teilt dieses Dreieck in zwei flächengleiche Teile.

Bearbeitung

Die Aussage ist falsch. Zur Widerlegung genügt ein Gegenbeispiel.

Wir nehmen ein regelmäßiges Dreieck und eine Gerade durch den Schwerpunkt parallel zu einer Dreiecksseite.



Gerade durch Schwerpunkt

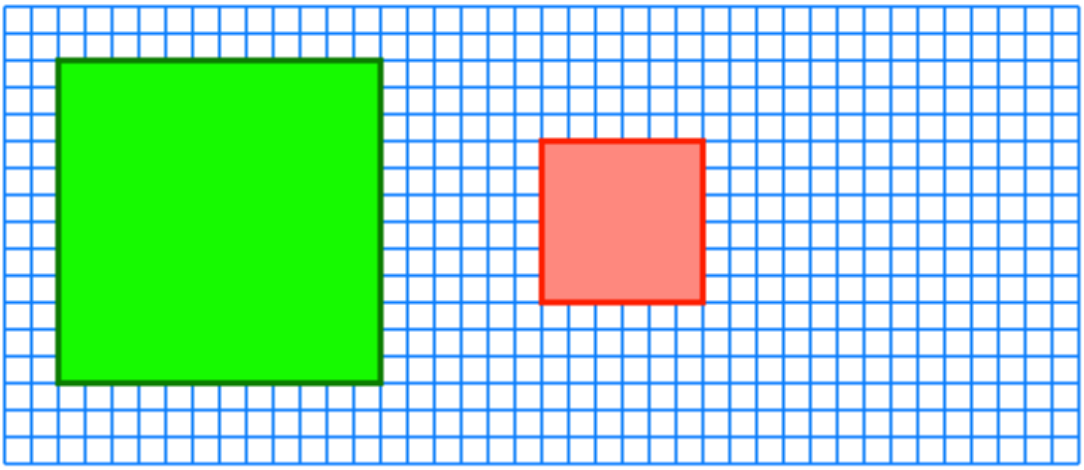
Durch die regelmäßige Unterteilung sehen wir, dass wir oben vier Flächenteile haben und unten fünf.

Bemerkung ohne Beweis: Die drei Schwerlinien, welche den Schwerpunkt definieren, teilen tatsächlich je die Dreiecksfläche in zwei gleich große Teile. Das sind aber auch die einzigen Geraden durch den Schwerpunkt, welche dies tun.

3 Abbildungen eines Quadrates

Mit welchen Projektionszentren kann das große Quadrat auf das kleine Quadrat abgebildet werden?

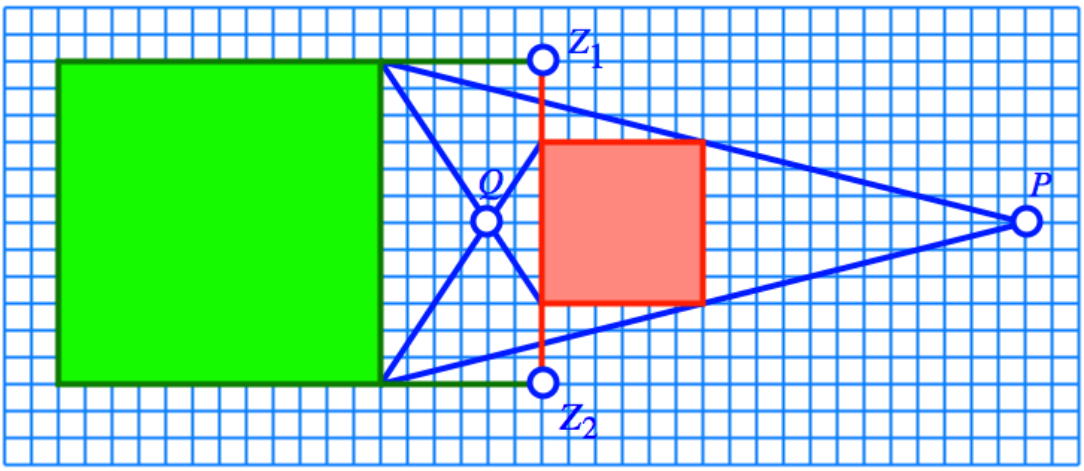
Gibt es auch Drehstreckungen, welche das große Quadrat auf das kleine Quadrat abbilden?



Das große Quadrat soll auf das kleine abgebildet werden

Bearbeitung

Es gibt ein äußeres Projektionszentrum P und ein inneres Projektionszentrum Q.



Zentren

Ferner gibt es eine Drehstreckung mit dem Zentrum Z_1, dem Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$ und dem Faktor $\frac{1}{2}$, welche das große Quadrat auf das kleine abbildet, und ebenso eine Drehstreckung mit dem Zentrum Z_2, dem Drehwinkel $-\frac{\pi}{2}$ und dem Faktor $\frac{1}{2}$.

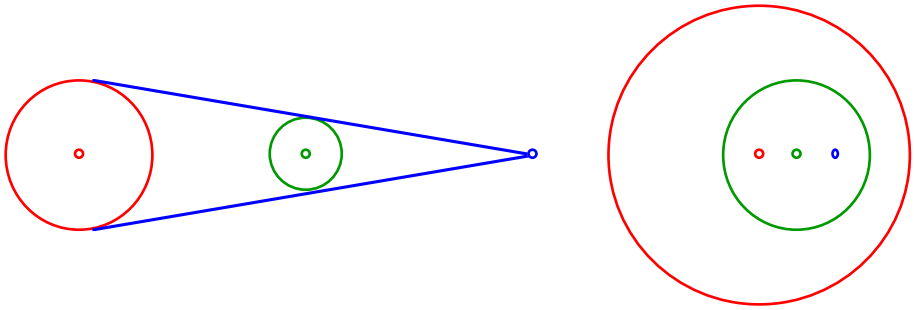
4 Zentralprojektion bei Kreisen

Auf wie viele Arten können zwei (verschieden große) Kreise durch eine Zentralprojektion aufeinander abgebildet werden?

Bearbeitung

Wegen der hohen Symmetrie des Kreises gibt es mehrere Möglichkeiten.

a) Äußeres Projektionszentrum



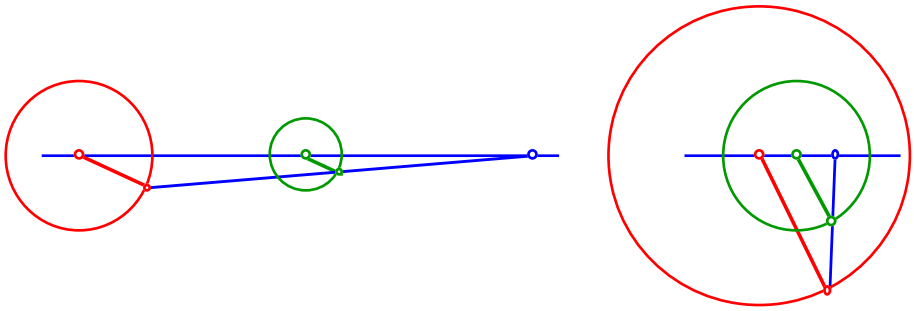
Äußeres Projektionszentrum

b) Inneres Projektionszentrum

Inneres Projektionszentrum

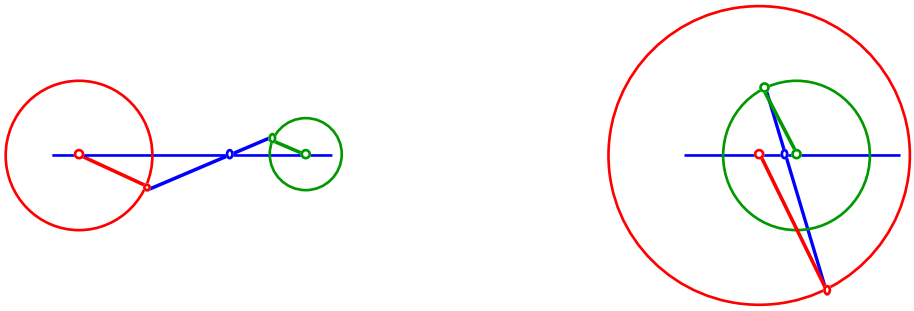
Welcher Fall nun wirklich vorliegt, muss durch Angabe eines zusätzlichen Punktes und seines Bildes spezifiziert werden:

a) Äußeres Projektionszentrum



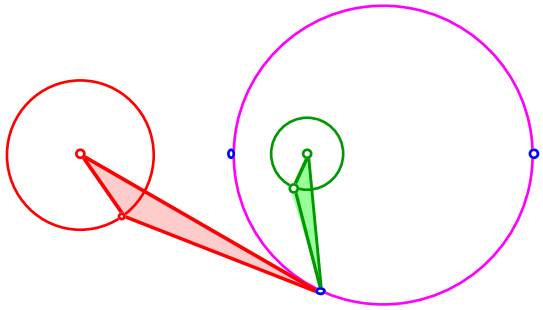
Äußeres Projektionszentrum

b) Inneres Projektionszentrum



Inneres Projektionszentrum

Voraussetzung ist dabei, dass die Radienstrecken *parallel* sind. Andernfalls sind die beiden Kreise mit ihren zugehörigen Punkten *nicht* in perspektivähnlicher Lage. Es muss dann mit einer Drehstreckung gearbeitet werden.



Drehstreckung

Bemerkung ohne Beweis: Das Zentrum der Drehstreckung liegt auf dem Thaleskreis über dem inneren und dem äußeren Projektionszentrum (das ist der Apolloniuskreis zum Teilverhältnis der beiden Kreisradien).

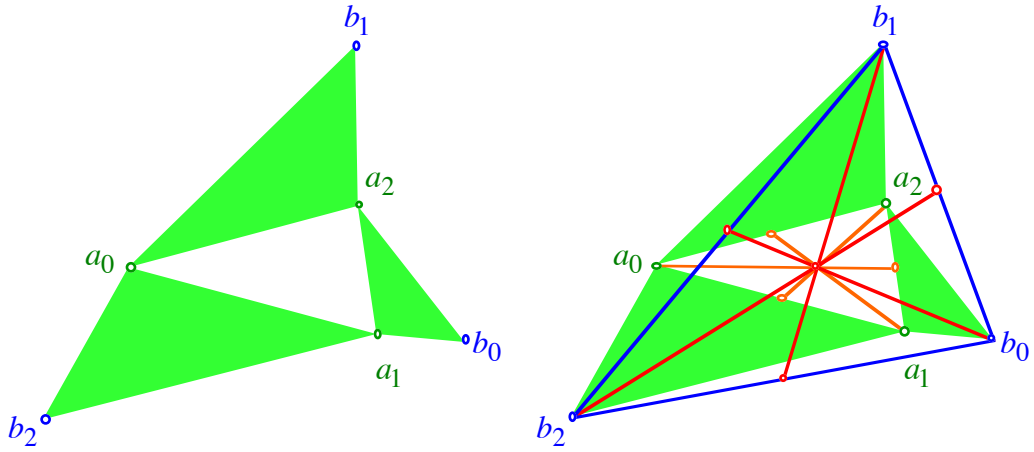
Frage: Wie finden wir bei nicht parallelen Radienstrecken das Drehstreckzenrum auf dem Apolloniuskreis?

Bemerkung: Wir sind bei unseren Überlegungen davon ausgegangen, dass die beiden Kreise gleich orientiert sind. Andernfalls können sie nicht in perspektivähnlicher Lage sein. Bei der Abbildung des einen Kreises auf den anderen müssen wir noch eine geeignete Geradenspiegelung einbauen.

5 Gemeinsamer Schwerpunkt

Einem Dreieck mit den Ecken a_0, a_1, a_2 setzen wir drei zu einander ähnliche Dreiecke $a_0a_2b_1$, $a_2a_1b_0$, $a_1a_0b_2$ auf.

Dann haben die beiden Dreiecke $a_0a_1a_2$ und $b_0b_1b_2$ denselben Punkt als Schwerpunkt.



Gemeinsamer Schwerpunkt

Wir arbeiten in der komplexen Zahlenebene.

Das Dreieck $a_0a_1a_2$ hat den Schwerpunkt $\frac{1}{3}(a_0+a_1+a_2)$.

Da die Dreiecke $a_0a_2b_1$, $a_2a_1b_0$, $a_1a_0b_2$ zueinander ähnlich sind, gibt es eine komplexe Zahl c mit:

$$c=\frac{b_0-a_2}{a_1-a_2}=\frac{b_1-a_0}{a_2-a_0}=\frac{b_2-a_1}{a_0-a_1}$$

Daher ist

$$b_0=a_2+c(a_1-a_2)$$
$$b_1=a_0+c(a_2-a_0)$$
$$b_2=a_1+c(a_0-a_1)$$

und:

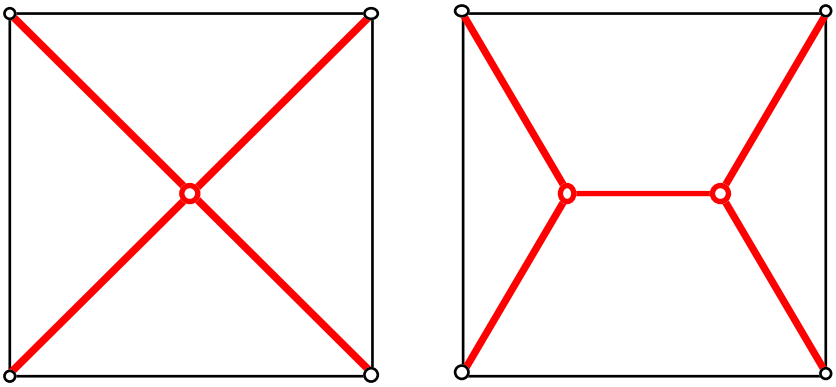
$$b_0+b_1+b_2=a_2+c(a_1-a_2)+a_0+c(a_2-a_0)+a_1+c(a_0-a_1)=a_0+a_1+a_2$$

Die beiden Dreiecke haben also denselben Schwerpunkt.

Die Überlegung ist verallgemeinerungsfähig auf ein n-Eck $a_0a_1\ldots a_{n-1}$.

6 Minimales Wegenetz im Quadrat

Quadrat der Seitenlänge 1. Wie groß ist jeweils die Gesamtlänge des Wegenetzes?



Wegenetze

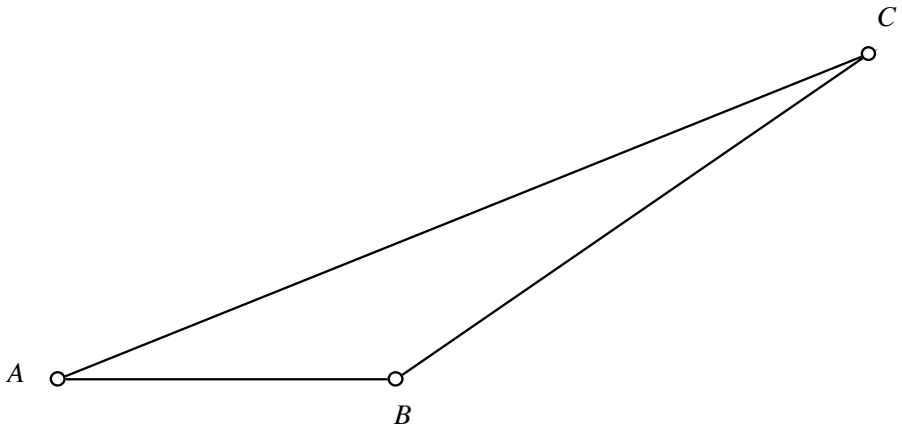
Ergebnis

a) $w_a = 2\sqrt{2} \approx 2.828$

b) $w_b = \sqrt{3} + 1 \approx 2.732$

7 Fermat-Punkt im stumpfwinkligen Dreieck

Gesucht ist im stumpfwinkligen Dreieck ABC der Fermat-Punkt. Welches ist hier das optimale Wegenetz?



Fermat-Punkt?

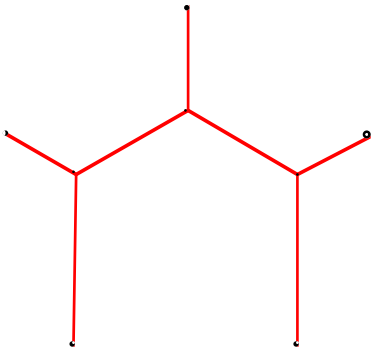
Ergebnis

Der Fermat-Punkt F liegt außerhalb des Dreieckes. Optimales Wegenetz: $\overline{AB} \cup \overline{BC}$

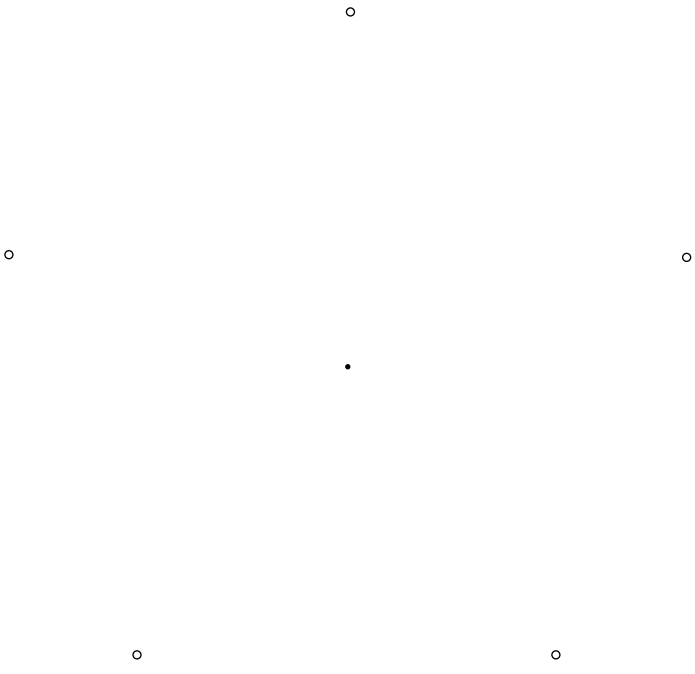
Bemerkung: Dieser Fall tritt ein, sobald einer der drei Dreieckswinkel ≥ 120° ist.

8 Wegenetz im regelmäßigen Fünfeck

Wie kann im regelmäßigen Fünfeck ein minimales Wegenetz gemäß Skizze konstruiert werden?

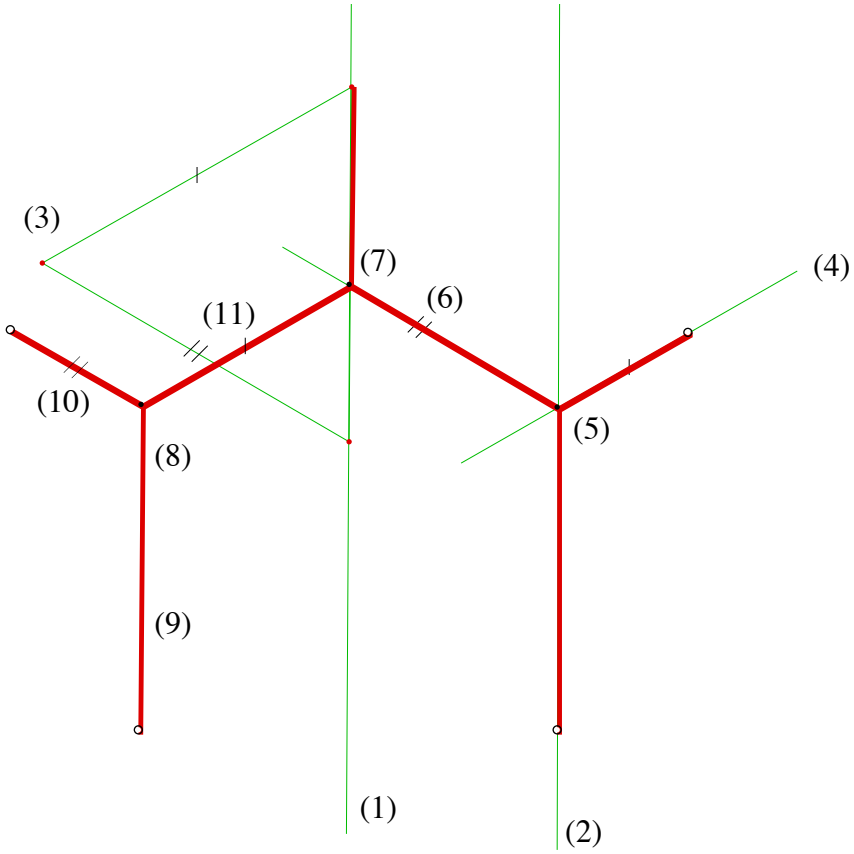


Skizze



Minimales Wegenetz?

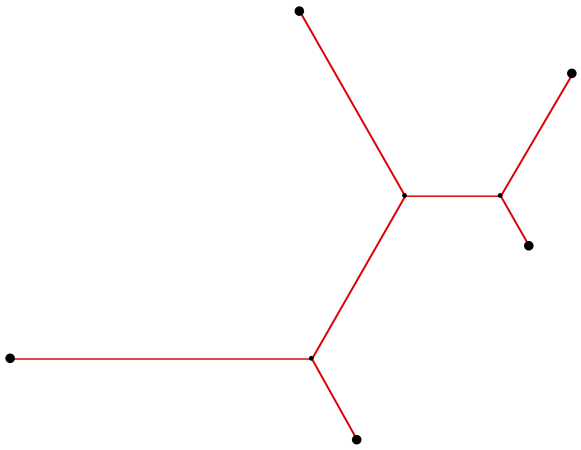
Ergebnis



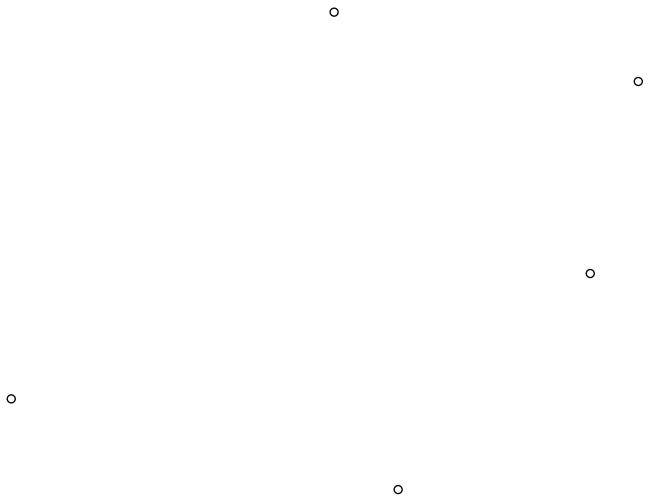
Minimales Wegenetz

9 Wegenetz im allgemeinen Fünfeck

Wie kann im Fünfeck ein minimales Wegenetz gemäß Skizze konstruiert werden?

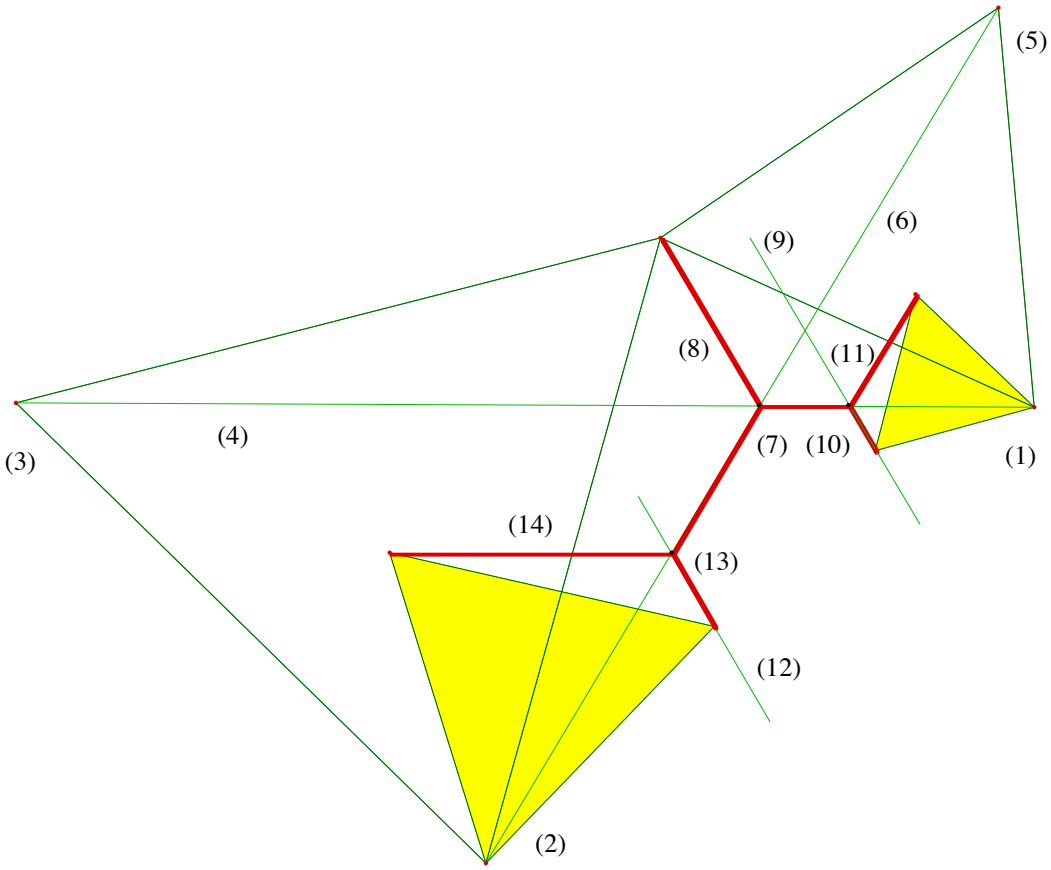


Skizze des Wegenetzes



Minimales Wegenetz?

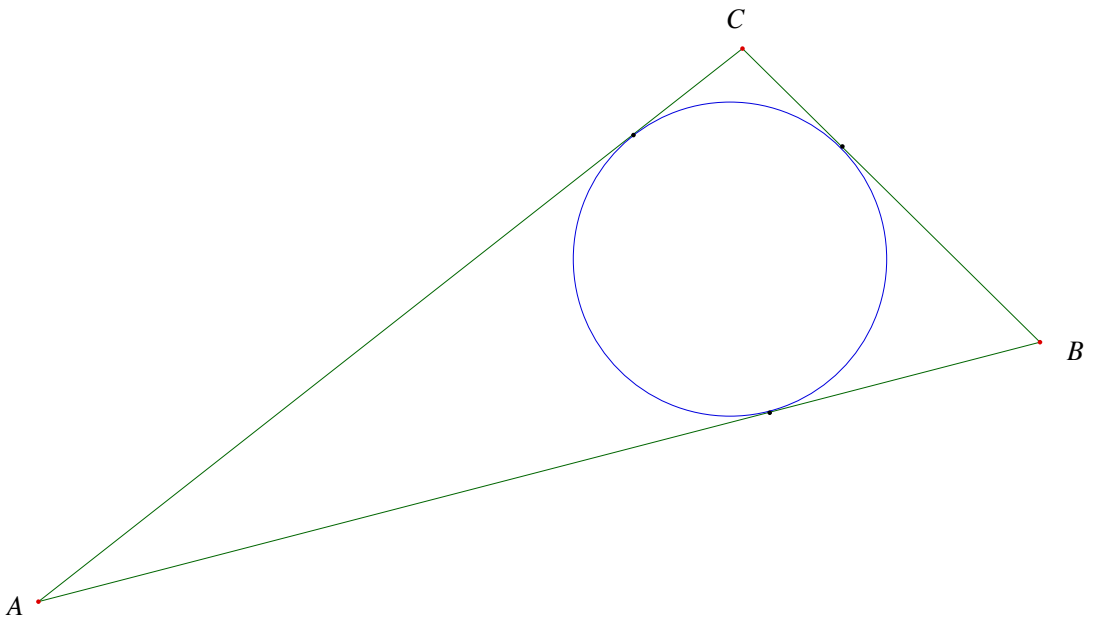
Ergebnis



Minimales Wegenetz

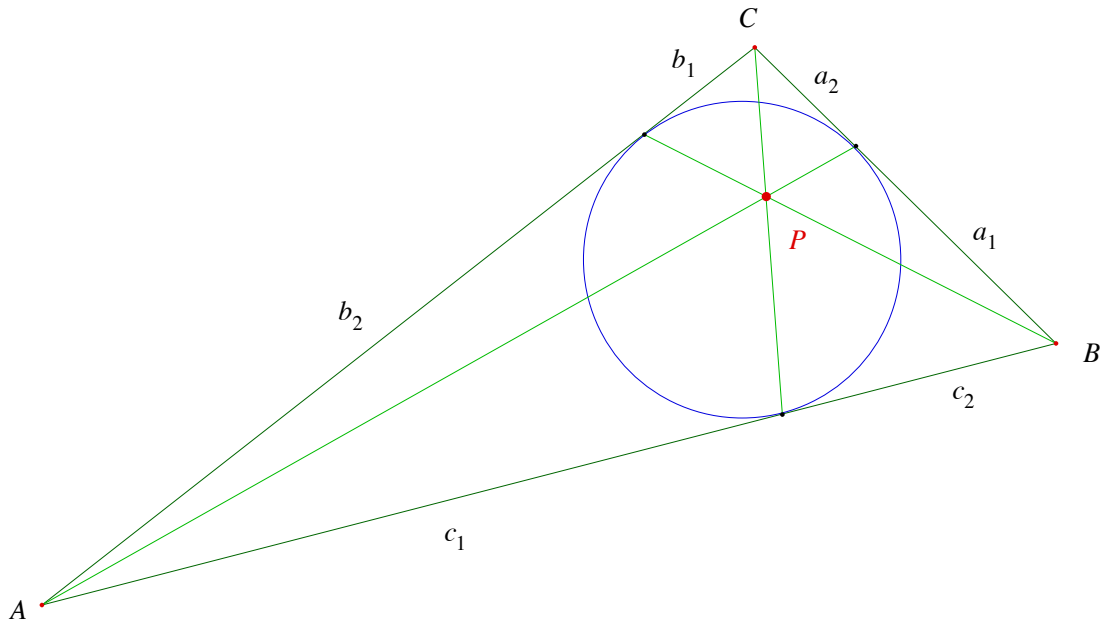
10 Innenkreis

Wie kann gezeigt werden, dass die drei Ecktransversalen durch die Berührungspunkte des Innenkreises auf der Gegenseite kopunktal sind?



Innenkreis

Ergebnis



Schnittpunkt

Beweis:

Zunächst ist (Tangentenabschnitte):

$$a_1 = c_2$$
$$b_1 = a_2$$
$$c_1 = b_2$$

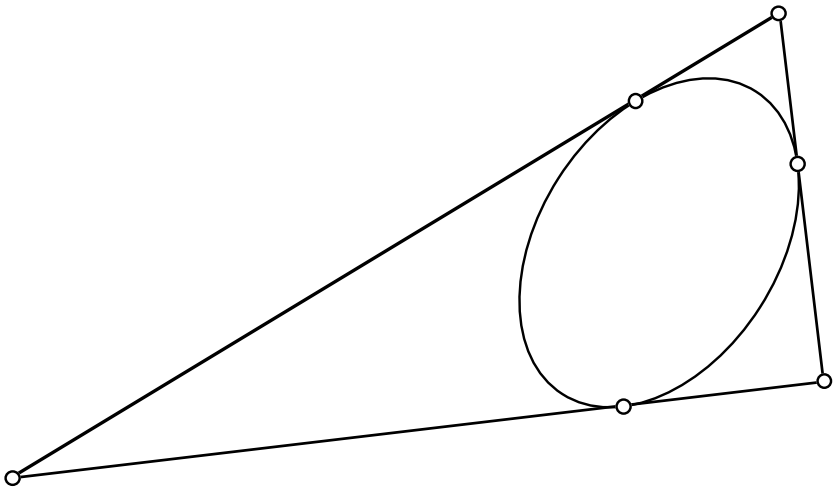
Daher ist:

$$\frac{a_1}{a_2}\frac{b_1}{b_2}\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{b_1}\frac{b_1}{c_1}\frac{c_1}{a_1} = 1$$

Nach dem Satz von CEVA sind daher die drei Ecktransversalen kopunktal.

11 Innenellipse

Und?



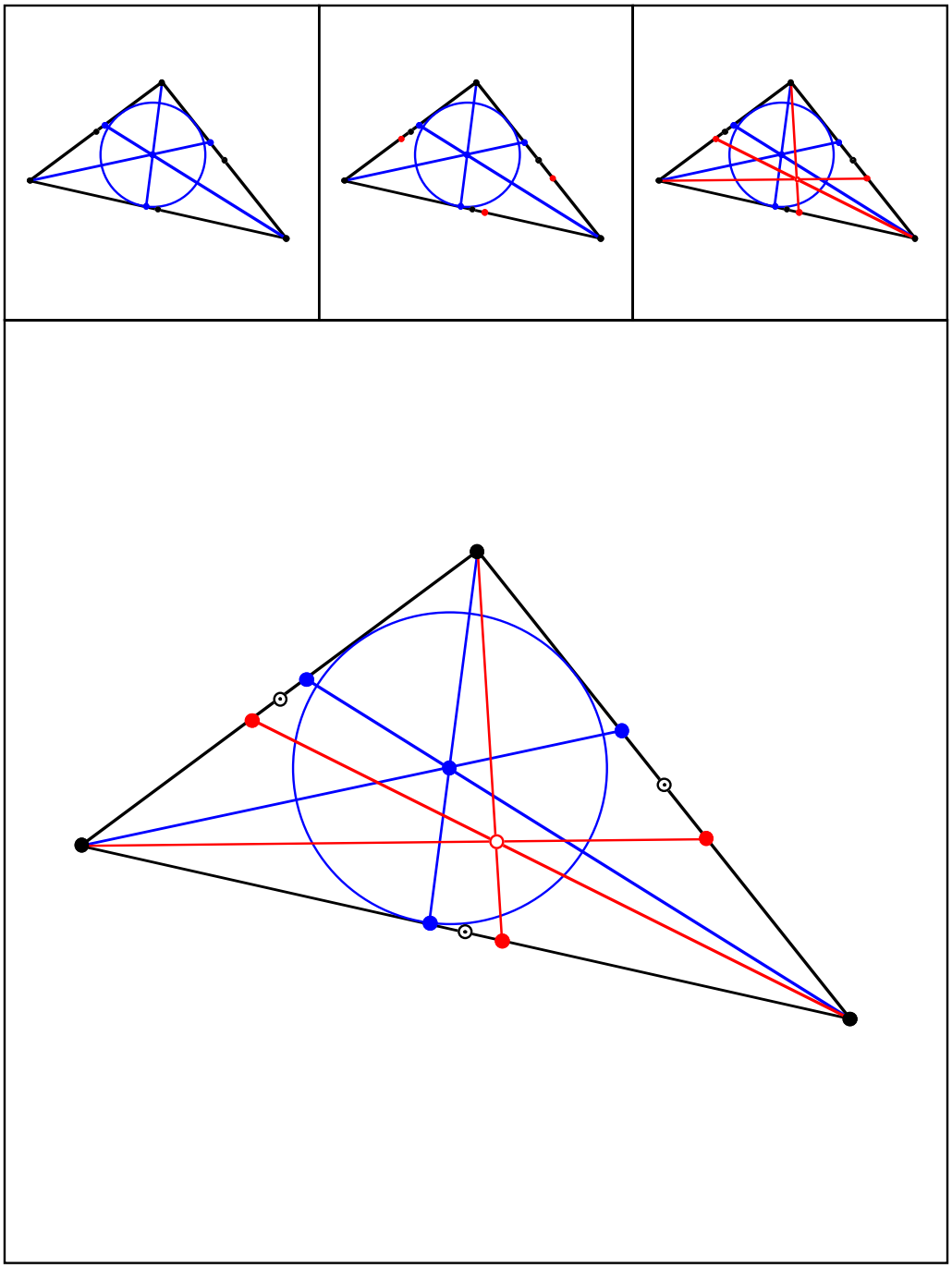
Innenellipse (eine von vielen möglichen)

Ergebnis

Gilt auch hier, da affines Bild der Figur der vorangehenden Aufgabe.

12 Schnittpunkt?

Stimmt die Figur?



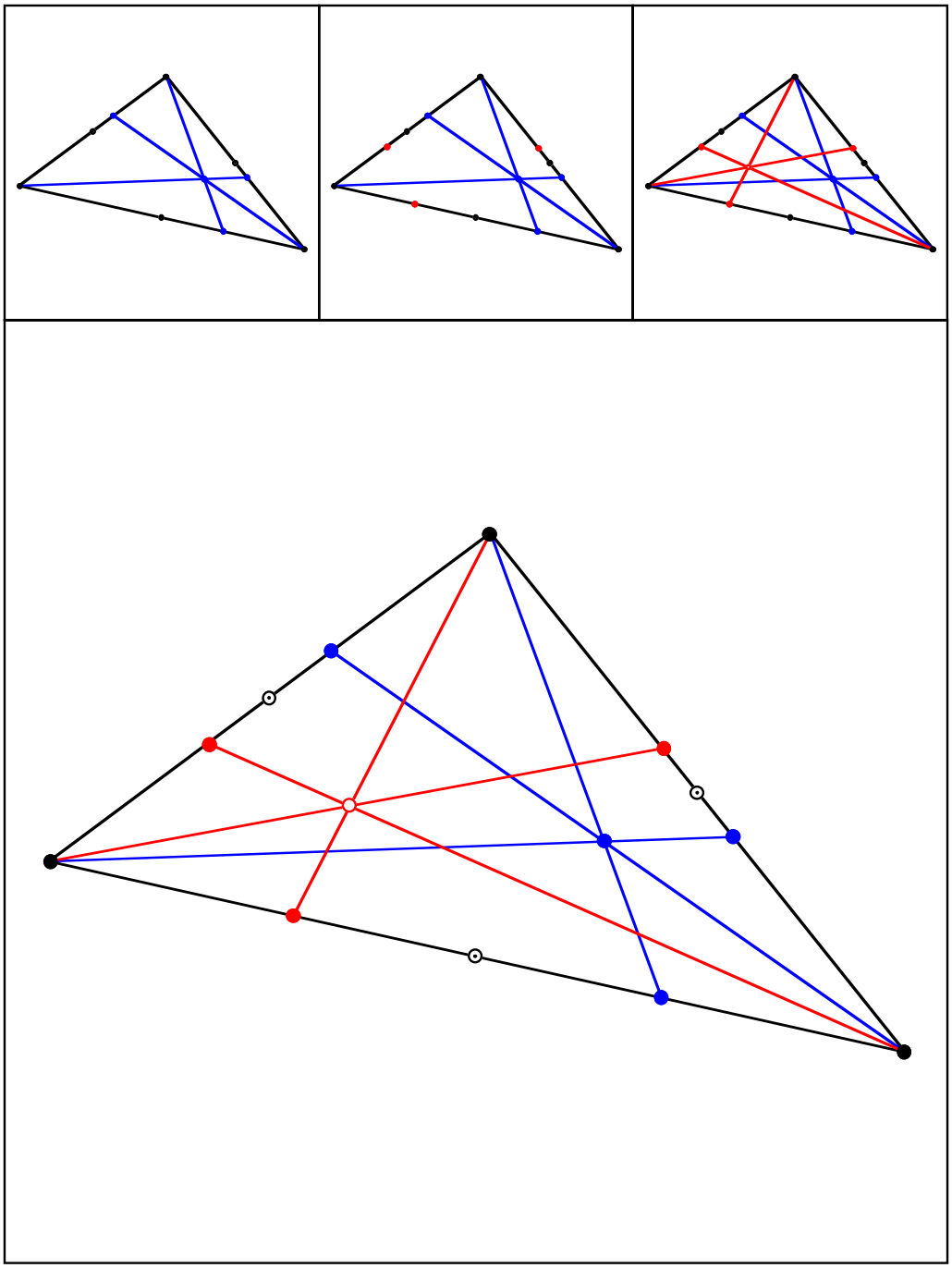
Stimmt die Figur?

Ergebnis

Ja. Die Endpunkte der Winkelhalbierenden erfüllen die Ceva-Bedingung. Durch Spiegeln an den Seitenmitten werden die Teilverhältnisse invertiert; die Ceva-Bedingung bleibt erfüllt.

13 Schnittpunkt?

Stimmt die Figur?



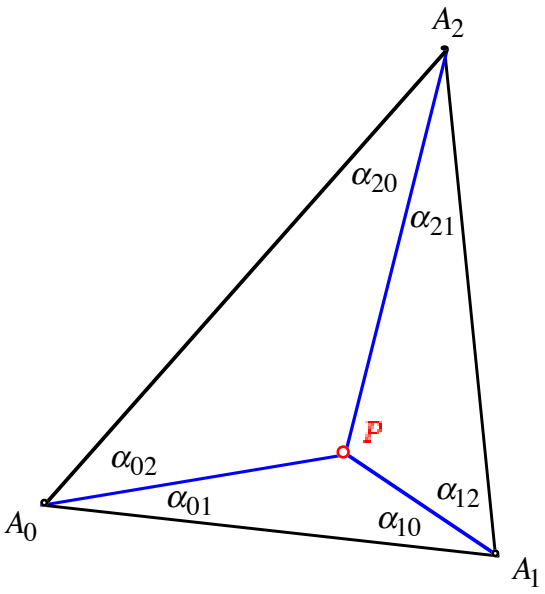
Stimmt die Figur?

Ergebnis

Ja. Die Endpunkte der Transversalen durch den Punkt im Dreieck erfüllen die Ceva-Bedingung. Durch Spiegeln an den Seitenmitten werden die Teilverhältnisse invertiert; die Ceva-Bedingung bleibt erfüllt.

14 Ceva und Winkel

Gibt es einen zum Satz von Ceva analogen Satz über Ecktransversalen, welcher mit den eingezeichneten Teilwinkeln arbeitet?



Winkel und Ceva

Tipp: Für ein Dreieck *ABC* gilt die Flächenformel:

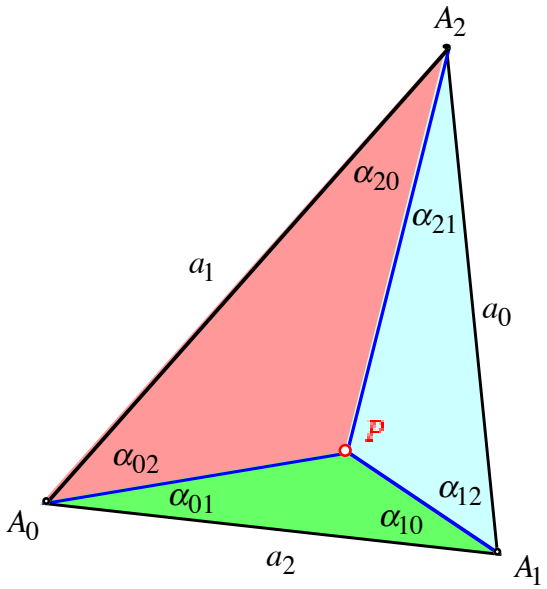
$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \sin(\gamma)$$

Ergebnis

Drei Eckpunktstransversalen sind genau dann kopunktal, wenn gilt:

$$\frac{\sin(\alpha_{01})}{\sin(\alpha_{02})} \frac{\sin(\alpha_{12})}{\sin(\alpha_{10})} \frac{\sin(\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{21})} = 1$$

Beweisskizze



Teildreiecke

Das grüne Teildreieck hat den Flächeninhalt:

$$A_{\Delta PA_0A_1} = \frac{1}{2} a_2 \, \overline{A_0P} \sin(\alpha_{01})$$

Das rote Teildreieck hat den Flächeninhalt:

$$A_{\Delta PA_0A_2} = \frac{1}{2} \overline{A_0P} \, a_1 \sin(\alpha_{02})$$

Somit ist

$$\sin(\alpha_{01}) = \frac{A_{\Delta PA_0A_1}}{\frac{1}{2} a_2 \, \overline{A_0P}} \quad \text{und} \quad \sin(\alpha_{02}) = \frac{A_{\Delta PA_0A_2}}{\frac{1}{2} \overline{A_0P} \, a_1}$$

und weiter:

$$\frac{\sin(\alpha_{01})}{\sin(\alpha_{02})} = \frac{\frac{A_{\Delta PA_0A_1}}{\frac{1}{2} a_2 \, \overline{A_0P}}}{\frac{A_{\Delta PA_0A_2}}{\frac{1}{2} \overline{A_0P} \, a_1}} = \frac{a_1 \, A_{\Delta PA_0A_1}}{a_2 \, A_{\Delta PA_0A_2}}$$

Analog:

$$\frac{\sin(\alpha_{01})}{\sin(\alpha_{02})} = \frac{a_1 \, A_{\Delta PA_0A_1}}{a_2 \, A_{\Delta PA_0A_2}} \qquad \frac{\sin(\alpha_{12})}{\sin(\alpha_{10})} = \frac{a_2 \, A_{\Delta PA_1A_2}}{a_0 \, A_{\Delta PA_1A_0}} \qquad \frac{\sin(\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{21})} = \frac{a_0 \, A_{\Delta PA_2A_0}}{a_1 \, A_{\Delta PA_2A_1}}$$

Somit ist das Produkt der drei Quotienten eins; es kürzt sich alles heraus. Damit ist der Satz in der einen Richtung bewiesen. In der anderen Richtung geht es wie in der Vorlesung.