Hans Walser
Mathematik für die Sekundarstufe 1
Frühjahrssemester 2011

Übung 1

8. März 2011

Aufgabe 1.1 Beispiele zur Symmetrie

Zeichnen Sie je eine Figur, welche folgende Symmetrie aufweist:

a) Achsensymmetrie

b) Achsensymmetrie ohne Punktsymmetrie

c) Drehsymmetrie ohne Punktsymmetrie

d) Translationssymmetrie und Achsensymmetrie, aber keine Punktsymmetrie

e) Translationssymmetrie und Achsensymmetrie und Punktsymmetrie

f) dreiteilige Drehsymmetrie

Ergebnis (exemplarisch)

a) A

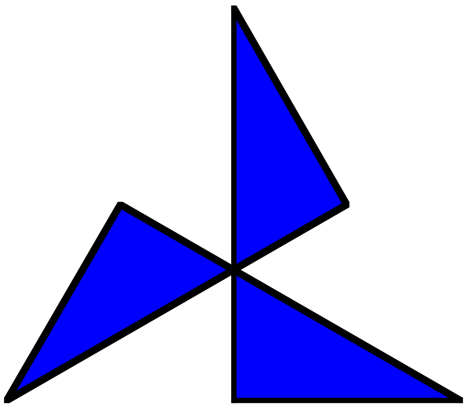
b) A

c) Pentagramm

d) ... AAAAAAAAAAAAAAAAA ...

e) ... pqbdpqbdpqbdpqbdpqbdpqbd ...

f)



Windrädchen

Aufgabe 1.2 Symmetrische Zahlen

Beispiele: 3, 44, 575, 2772, 98489, 231132

a) Wie viele symmetrische Zahlen gibt es bei gegebener Stellenzahl?

b) Die zweistelligen symmetrischen Zahlen 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 sind alle durch 11 teilbar. Gilt das allgemein für symmetrische Zahlen?

Bearbeitung

a) Wie viele symmetrische Zahlen gibt es bei gegebener Stellenzahl?

Stellenzahl	# symmetrische Zahlen
1	9
2	9
3	90
4	90
5	900
6	900

Wir haben ein Paritätsproblem, das heißt ein unterschiedliches Verhalten je nachdem die Stellenzahl gerade oder ungerade ist.

Bei einer geraden Stellenzahl $2n$ können wir die ersten n Stellen beliebig wählen und dann dieselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge dazufügen.

Bei einer ungeraden Stellenzahl $2n-1$ können wir die ersten n Stellen beliebig wählen. Die Ziffer an der n-ten Stelle liegt auf der Symmetrieachse, sie darf nicht mehr wiederholt werden.

b) Teilbarkeit durch 11:

Beispiele

Die 9 einstelligen symmetrischen Zahlen (das heißt alle einstelligen Zahlen) sind nicht durch 11 teilbar.

Die 9 zweistelligen symmetrischen Zahlen sind alle durch 11 teilbar.

Die 90 dreistelligen symmetrischen Zahlen sind nur sporadisch durch 11 teilbar. In der Tabelle ist zu jeder Zahl der Rest angegeben, der bei Division durch 11 übrig bleibt. Die Reste zeigen ein gewisses regelmäßiges Verhalten, das immer bei einem Hundertersprung gestört ist.

101	2		404	8		707	3
111	1		414	7		717	2
121	0		424	6		727	1
131	10		434	5		737	0
141	9		444	4		747	10
151	8		454	3		757	9
161	7		464	2		767	8
171	6		474	1		777	7
181	5		484	0		787	6
191	4		494	10		797	5
202	4		505	10		808	5
212	3		515	9		818	4
222	2		525	8		828	3
232	1		535	7		838	2
242	0		545	6		848	1
252	10		555	5		858	0
262	9		565	4		868	10
272	8		575	3		878	9
282	7		585	2		888	8
292	6		595	1		898	7
303	6		606	1		909	7
313	5		616	0		919	6
323	4		626	10		929	5
333	3		636	9		939	4
343	2		646	8		949	3
353	1		656	7		959	2
363	0		666	6		969	1
373	10		676	5		979	0
383	9		686	4		989	10
393	8		696	3		999	9

Die 90 vierstelligen symmetrischen Zahlen sind alle durch 11 teilbar. Die Tabelle gibt die Quotienten an. Unter den Quotienten hat es etliche dreistellige symmetrische Zahlen.

1001 / 11 = 91		4004 / 11 = 364		7007 / 11 = 637
1111 / 11 = 101		4114 / 11 = 374		7117 / 11 = 647
1221 / 11 = 111		4224 / 11 = 384		7227 / 11 = 657
1331 / 11 = 121		4334 / 11 = 394		7337 / 11 = 667
1441 / 11 = 131		4444 / 11 = 404		7447 / 11 = 677
1551 / 11 = 141		4554 / 11 = 414		7557 / 11 = 687
1661 / 11 = 151		4664 / 11 = 424		7667 / 11 = 697
1771 / 11 = 161		4774 / 11 = 434		7777 / 11 = 707

1881 / 11 = 171	4884 / 11 = 444	7887 / 11 = 717
1991 / 11 = 181	4994 / 11 = 454	7997 / 11 = 727
2002 / 11 = 182	5005 / 11 = 455	8008 / 11 = 728
2112 / 11 = 192	5115 / 11 = 465	8118 / 11 = 738
2222 / 11 = 202	5225 / 11 = 475	8228 / 11 = 748
2332 / 11 = 212	5335 / 11 = 485	8338 / 11 = 758
2442 / 11 = 222	5445 / 11 = 495	8448 / 11 = 768
2552 / 11 = 232	5555 / 11 = 505	8558 / 11 = 778
2662 / 11 = 242	5665 / 11 = 515	8668 / 11 = 788
2772 / 11 = 252	5775 / 11 = 525	8778 / 11 = 798
2882 / 11 = 262	5885 / 11 = 535	8888 / 11 = 808
2992 / 11 = 272	5995 / 11 = 545	8998 / 11 = 818
3003 / 11 = 273	6006 / 11 = 546	9009 / 11 = 819
3113 / 11 = 283	6116 / 11 = 556	9119 / 11 = 829
3223 / 11 = 293	6226 / 11 = 566	9229 / 11 = 839
3333 / 11 = 303	6336 / 11 = 576	9339 / 11 = 849
3443 / 11 = 313	6446 / 11 = 586	9449 / 11 = 859
3553 / 11 = 323	6556 / 11 = 596	9559 / 11 = 869
3663 / 11 = 333	6666 / 11 = 606	9669 / 11 = 879
3773 / 11 = 343	6776 / 11 = 616	9779 / 11 = 889
3883 / 11 = 353	6886 / 11 = 626	9889 / 11 = 899
3993 / 11 = 363	6996 / 11 = 636	9999 / 11 = 909

Die fünfstelligen symmetrischen Zahlen sind in der Regel nicht durch 11 teilbar. Die Tabelle zeigt eine Auswahl mit Rest bei Division durch 11. In der Tabelle die ersten zwanzig und die letzten zwanzig Beispiele.

10001	2	98089	2
10101	3	98189	3
10201	4	98289	4
10301	5	98389	5
10401	6	98489	6
10501	7	98589	7
10601	8	98689	8
10701	9	98789	9
10801	10	98889	10
10901	0	98989	0
11011	0	99099	0
11111	1	99199	1
11211	2	99299	2
11311	3	99399	3
11411	4	99499	4
11511	5	99599	5
11611	6	99699	6
11711	7	99799	7
11811	8	99899	8
11911	9	99999	9

Die sechsstelligen symmetrischen Zahlen sind alle durch 11 teilbar. In der Tabelle die ersten zwanzig und die letzten zwanzig Beispiele.

100001 / 11 = 9091	980089 / 11 = 89099
101101 / 11 = 9191	981189 / 11 = 89199
102201 / 11 = 9291	982289 / 11 = 89299
103301 / 11 = 9391	983389 / 11 = 89399

104401 / 11 = 9491	984489 / 11 = 89499
105501 / 11 = 9591	985589 / 11 = 89599
106601 / 11 = 9691	986689 / 11 = 89699
107701 / 11 = 9791	987789 / 11 = 89799
108801 / 11 = 9891	988889 / 11 = 89899
109901 / 11 = 9991	989989 / 11 = 89999
110011 / 11 = 10001	990099 / 11 = 90009
111111 / 11 = 10101	991199 / 11 = 90109
112211 / 11 = 10201	992299 / 11 = 90209
113311 / 11 = 10301	993399 / 11 = 90309
114411 / 11 = 10401	994499 / 11 = 90409
115511 / 11 = 10501	995599 / 11 = 90509
116611 / 11 = 10601	996699 / 11 = 90609
117711 / 11 = 10701	997799 / 11 = 90709
118811 / 11 = 10801	998899 / 11 = 90809
119911 / 11 = 10901	999999 / 11 = 90909

Vermutung

Wir vermuten, dass die Teilbarkeit durch 11 von der Stellenzahl abhängt: Symmetrische Zahlen mit gerader Stellenzahl sind immer durch 11 teilbar.

Beweis

Eine symmetrische Zahl etwa mit der Stellezahl 8 kann zerlegt werden:

$$dcbaabcd = a \cdot 11000 + b \cdot 100100 + c \cdot 1000010 + d \cdot 10000001$$

Es genügt, zu zeigen, dass die Zahlen 11, 1001, 100001, 10000001, ... durch 11 teilbar sind.

Erster Lösungsweg: Mit Formel

Es gilt die Formel:

$$\left(a^k - b^k\right) = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + b^{k-1}\right)$$

$$\frac{a^k - b^k}{a-b} = a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + b^{k-1}$$

Beweis durch Nachrechnen.

Für $a = 10$ und $b = -1$ erhalten wir bei *ungeradem* k die für uns relevanten Fälle:

k	
1	11 / 11 = 1
2	99 / 11 = 9
3	1001 / 11 = 91
4	9999 / 11 = 909
5	100001 / 11 = 9091
6	999999 / 11 = 90909
7	10000001 / 11 = 909091
8	99999999 / 11 = 9090909
9	1000000001 / 11 = 90909091
10	9999999999 / 11 = 909090909

Zweiter Lösungsweg: Induktionsbeweis

Zu zeigen ist, dass die Zahlen 11, 1001, 100001, 10000001, ... durch 11 teilbar sind. Die Zahlen haben die Stellenzahl $2n$.

(I) Für $n = 1$ ist die Aussage trivial

(II) Induktionsschritt: Wir zerlegen wie folgt.

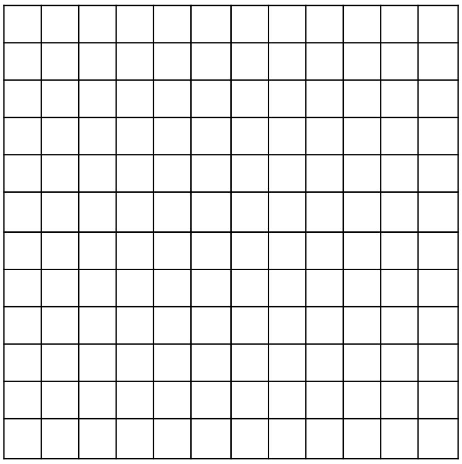
$$\underbrace{1000\cdots0001}_{2(n+1)\text{ Stellen}} = \underbrace{1100\cdots0011}_{2(n+1)\text{ Stellen}} - \underbrace{100\cdots001}_{2n\text{ Stellen}} \cdot 10$$

Der erste Summand rechts ist durch 11 teilbar: $\underbrace{1100\cdots0011}_{2(n+1)\text{ Stellen}} = \underbrace{100\cdots0001}_{2n+1\text{ Stellen}} \cdot 11$

Der zweite Summand rechts ist nach Induktionsvoraussetzung durch 11 teilbar.

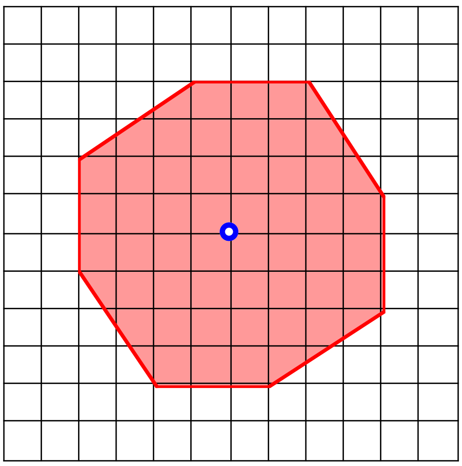
Aufgabe 1.3 Achteck

Gibt es ein Achteck mit einer vierstrahligen Drehsymmetrie, aber ohne Symmetrieachsen?



Achteck mit vierstrahliger Drehsymmetrie, aber ohne Symmetrieachsen?

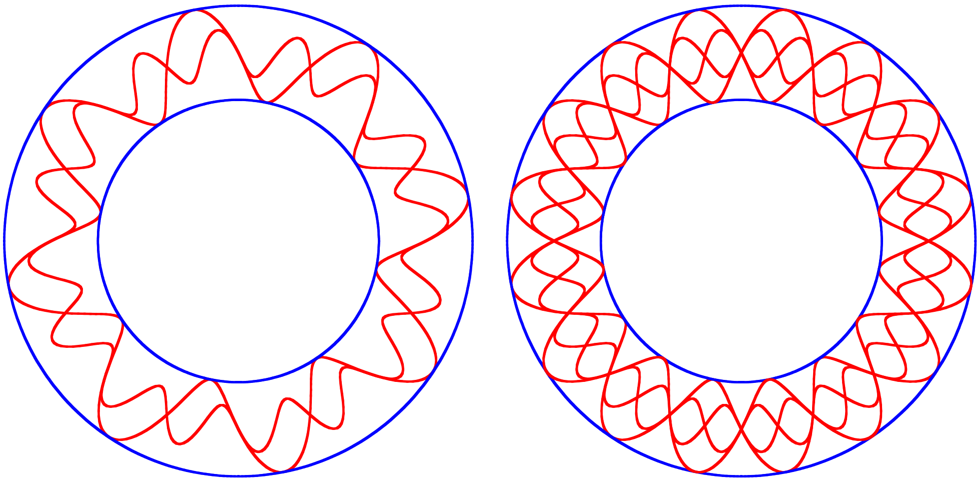
Bearbeitung



Achteck mit vierstrahliger Drehsymmetrie, aber ohne Symmetrieachsen

Aufgabe 1.4 Runde Sachen

Welche Symmetrien haben die folgenden Figuren?



Symmetrien?

Ergebnis

Figur links: Achteilige Drehsymmetrie, keine Symmetrieachsen

Figur rechts: 16-teilige Drehsymmetrie, 16 Symmetrieachsen

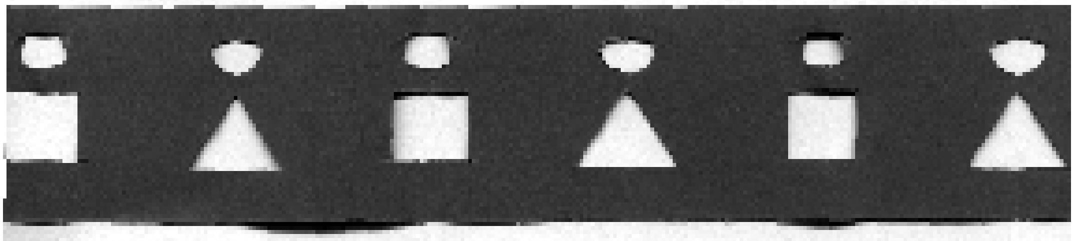
Aufgabe 1.5 Translationssymmetrie

a) Stellen Sie einen translationssymmetrischen Scherenschnitt her.

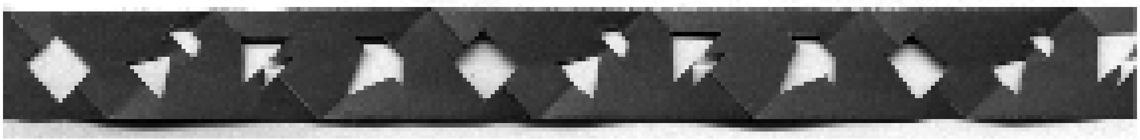
b) Stellen Sie einen translationssymmetrischen Scherenschnitt *ohne* Achsensymmetrie her.

Ergebnis (exemplarisch)

a)



b)



Aufgabe 1.6 Dreieck mit 2 Symmetrieachsen?

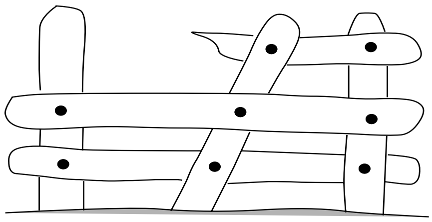
Warum gibt es kein Dreieck mit genau zwei Symmetrieachsen?

Beweisskizze

1. Ungerade Eckenzahl, daher Symmetrieachsen durch Ecken.
2. Annahme: Genau zwei Symmetrieachsen, zum Beispiel durch A und B.
   Symmetrieachse durch A führt zu $b = c$.
   Symmetrieachse durch B führt zu $c = a$.
3. $a = b = c$. Dreieck gleichseitig, daher drei Symmetrieachsen. Widerspruch

Aufgabe 1.7 Zaun

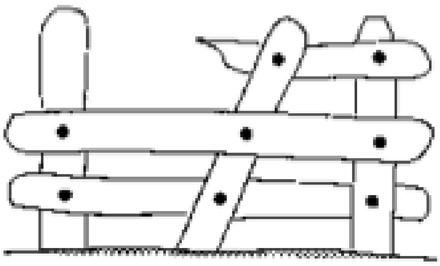
Wie sieht der verlotterte Zaun von der Rückseite aus?



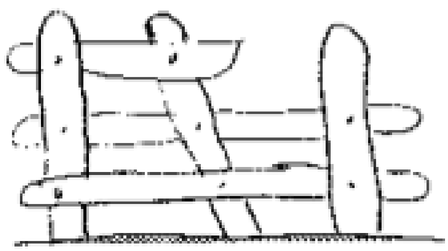
Vorderseite

Rückseite

Ergebnis



Vorderseite



Rückseite

Aufgabe 1.8 Janus-Figur

Besuchen Sie die Janus-Figur von Bänninger am Totentanz in Basel. Frage: Welcher Fuß gehört zu welcher Seite?

Ergebnis

Der untere Fuß gehört zum alten Mann. Der obere Fuß gehört zum jungen Mann. Es sind zwei linke Füße.