Hans Walser
Mathematik für die Sekundarstufe 1
Frühjahrssemester 2011

Übung 2

29. März 2011

Aufgabe 2.1 Reimschemata

Wie viele Reimschemata gibt es für ein Gedicht mit vier Zeilen (wobei ungereimte Zeilen auch zugelassen sind)?

Beispiele:

Wenn einer der mit Mühe kaum,
gekrochen ist auf einen Baum,
nun meint, dass er ein Vogel wär,
dann irrt sich der.

Busch

Habe nun ach Philosophie,
Juristerei und Medizin,
und leider Gottes auch Theologie
durchaus studiert mit redlichem Bemühn.

Goethe

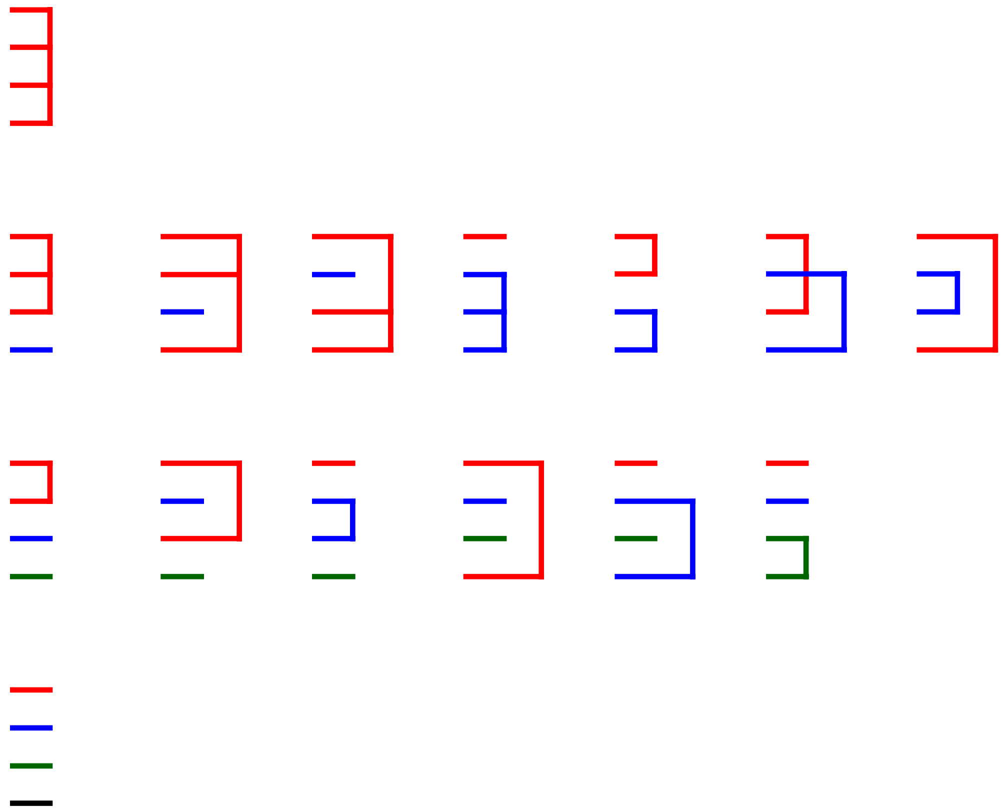
Und die einen sind im Dunkeln,
und die andern sind im Licht,
Die im Lichte kann man sehen,
die im Dunkeln sieht man nicht.

Brecht

SLA 1, Frühjahr 2011, Übung 2, Blatt 2

Ergebnis

15



Reimschemata

Bemerkung: Stirlingsche Zahlen (zweiter Art), Bellsche Zahlen

Es sei $S_{n,k}$ die Anzahl der Reimschemata bei n Zeilen und genau k Endreimen. Aus $S_{1,1} = 1$ und der Rekursion $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$ (Überlegung: $n-1$ Zeilen seien schon gedichtet. Hat die n-te Zeile einen neuen Endreim, dann hatten wir vorher nur deren $k-1$, somit $s_{n-k,k-1}$ Möglichkeiten. Hat aber die n-te Zeile einen alten Endreim, dann muss es einer der k schon vorhandenen Endreime sein; dies ergibt $ks_{n-1,k}$ Möglichkeiten.) ergibt sich das Zahlendreieck

1

1 1

1 3 1

1 7 6 1

1 15 25 10 1

Diese Zahlen heißen Stirlingsche Zahlen zweiter Art (J. Stirling, 1692 - 1770). (Vgl. [Jeger 1976], S. 65, [Walser 1985]).

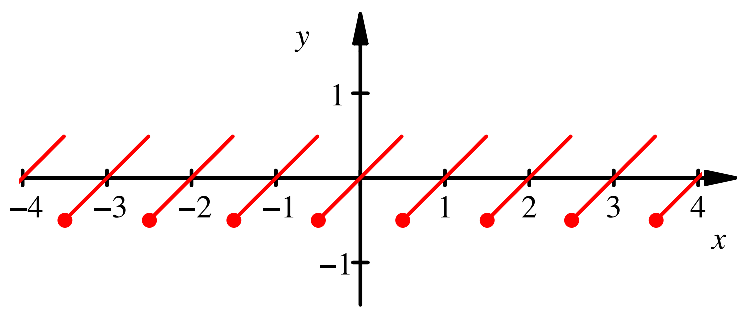
Die Lösung unseres Problems ist $1+7+6+1=15$. Die Zahlen $B_n = \sum_{k=1}^{n} S_{n,k}$ heißen Bellsche Zahlen (Eric Temple Bell, 1883 - 1961).

Aufgabe 2.2 Symmetrien einer Funktion

Skizzieren Sie die Funktion $y = f(x) = x - \mathrm{round}(x)$. Welche Symmetrien hat der Funktionsgraph?

Ergebnis

Wenn man davon ausgeht, dass „Runden" im kritischen Fall der halbzahligen Zahlen „Aufrunden" heißt, sieht die Lösung so aus:



$y = f(x) = x - \mathrm{round}(x)$

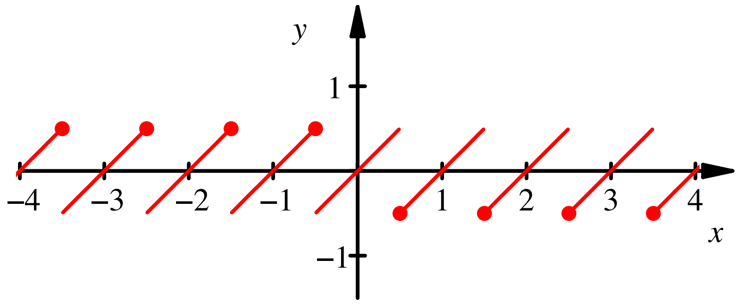
Wir haben eine Translationssymmetrie.

Nun gibt es aber Software, welche anders rundet. Excel macht es so:

x	RUNDEN(x)
-4.5	-5
-3.5	-4
-2.5	-3
-1.5	-2
-0.5	-1
0.5	1
1.5	2
2.5	3
3.5	4
4.5	5

$y = \mathrm{round}(x)$

Entsprechend sieht auch $y = f(x) = x - \mathrm{round}(x)$ aus:



$y = f(x) = x - \mathrm{round}(x)$

Der Graph hat keine Translationssymmetrie, aber eine Punktsymmetrie mit dem Symmetriezentrum im Ursprung.

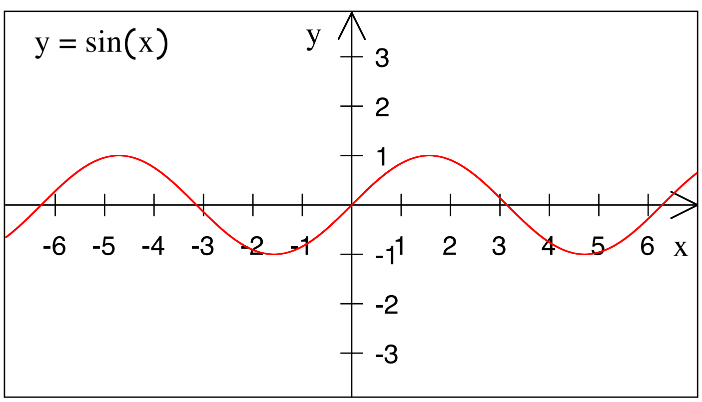
Aufgabe 2.3 Translationssymmetrische Funktionsgraphen

a) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion mit der Periodenlänge 2π.

b) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion mit der Periodenlänge 1.

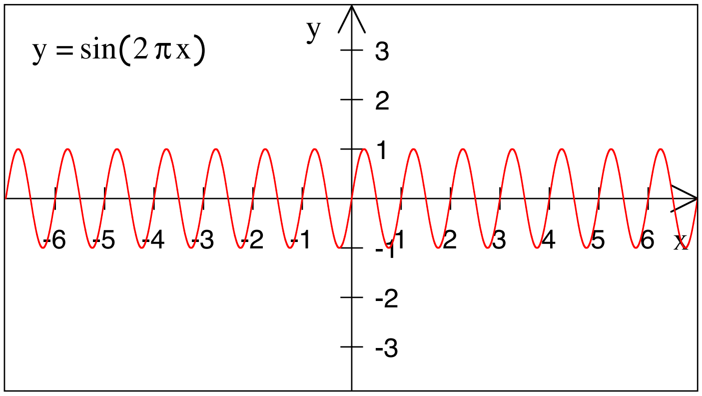
Ergebnis (exemplarisch)

a) $\sin(x)$



$y = \sin(x)$

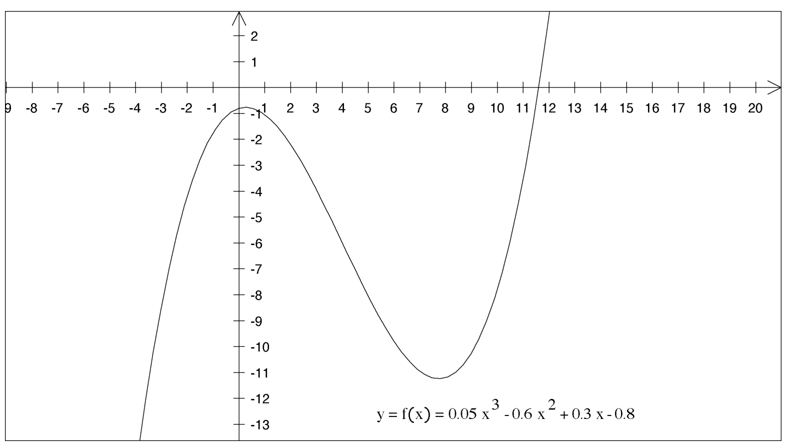
b) $\sin(2\pi x)$



$y = \sin(2\pi x)$

Aufgabe 2.4 Kubische Parabel

Zeigen Sie, dass der Graph einer kubischen Funktion $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *immer* punktsymmetrisch ist.



Punktsymmetrie

Ergebnis

Mörderische Rechnung.

Ansatz: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Für den Wendepunkt W (vermutetes Symmetriezentrum) erhalten wir (zweite Ableitung Null setzen): $x_W = -\frac{b}{3a}$, $y_W = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d$.

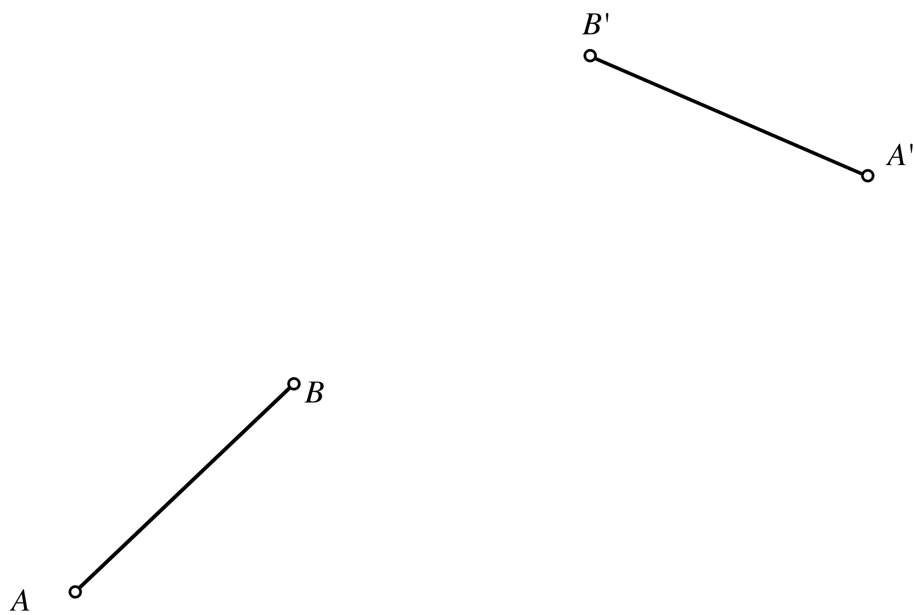
Neue Koordinaten relativ zum Wendepunkt: $\xi = x - x_W$, $\eta = y - y_W$, also $x = \xi + x_W$, $y = \eta + y_W$. In $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ einsetzen ergibt:

SLA 1, Frühjahr 2011, Übung 2, Blatt 6

$\eta = a\xi^3 + \xi\left(-\frac{1}{3}\frac{b^2}{a} + c\right)$, also eine ungerade Funktion mit punktsymmetrischem Graphen

Aufgabe 2.5 Isometrien

Es gibt zwei verschiedene Isometrien, welche die Strecke AB auf die Strecke $A'B'$ abbilden. (Tipp: Orientierung)

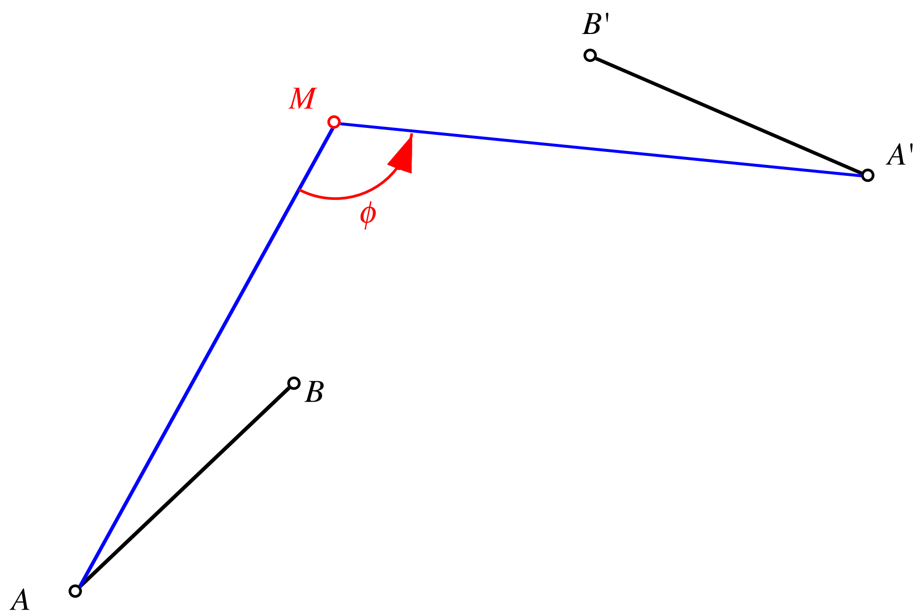


Isometrien?

SLA 1, Frühjahr 2011, Übung 2, Blatt 7

Ergebnis

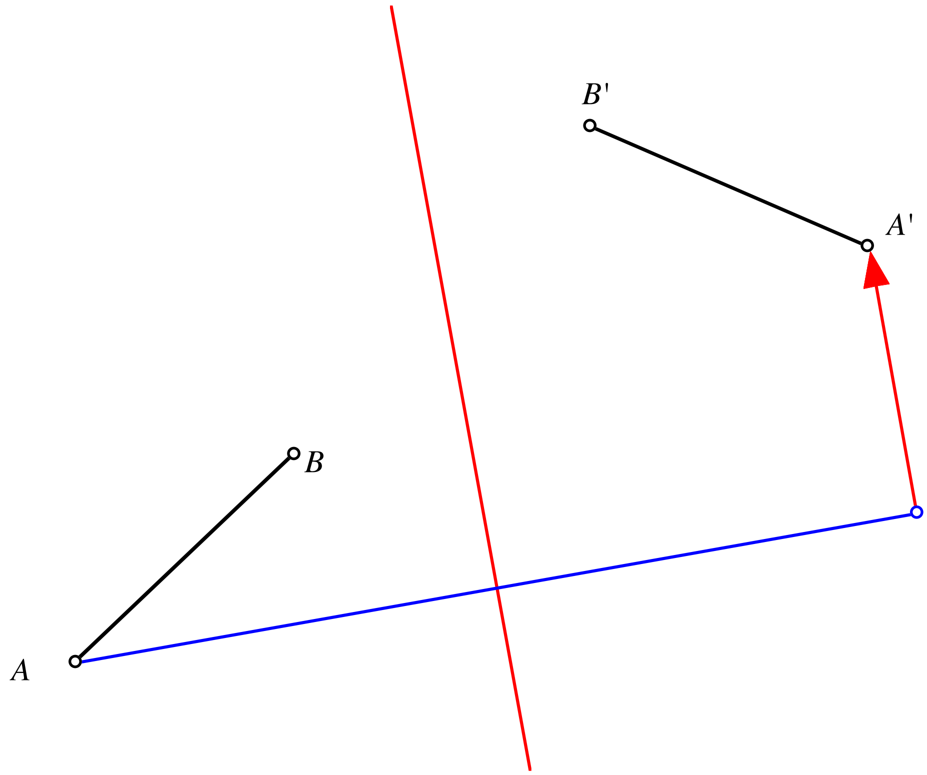
1) Drehung um M um ϕ.



Drehung

SLA 1, Frühjahr 2011, Übung 2, Blatt 8

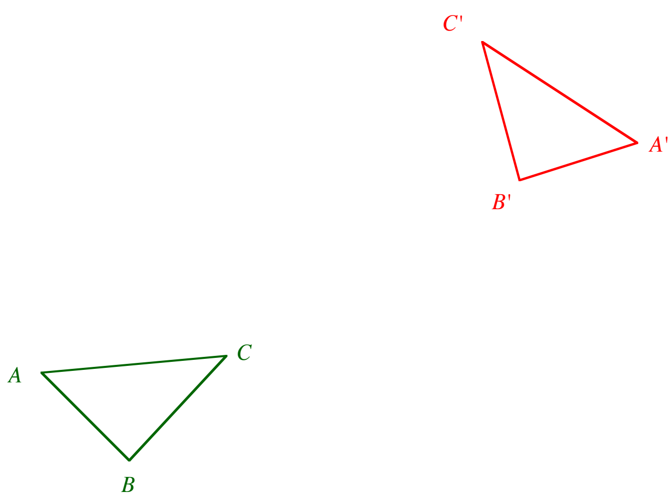
2) Schubspiegelung (orientierungsumkehrend)



Schubspiegelung

Aufgabe 2.6 Schubspiegelung

Das Dreieck $A'B'C'$ ist das Bild des Dreieckes ABC bei einer Schubspiegelung. Gesucht sind Achse und Translationsvektor dieser Schubspiegelung.



Schubspiegelung

SLA 1, Frühjahr 2011, Übung 2, Blatt 9

Ergebnis

Der Translationsvektor gibt auch die Achse an.